th. p.
145

Felkel

Math. P. 145
2.

Neueröffnetes Geheimniß der Parallellinien,

enthaltend verschiedene wichtige

Zusätze

zur Proportion- und Körperlehre,

von
Anton Felkel,
Liebhaber der mathematisch- und physikalischen Wissenschaften.

Nebst einer dreyfachen vorläufigen Nachricht von den dazu dienenden neuerfundenen mechanischen Kunstgriffen rc.

Wien,
in der von Ghelenschen Buchhandlung.
1781.

In nova fert animu mütastas *ducere* formas
Corpora.

Ovid. 1. Metam.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht.

So gleichgiltig die Geschichte einer Erfindung für Kenner und Liebhaber zu seyn scheint, so können doch mancherlei Umstände derselben für beede angenehm und nützlich seyn. Der kritische Theoretiker, der sich über die Schritte des Erfinders in dem wichtigsten Zeitpunkte vielleicht mehr ärgern, als erbauen, würde, muß schweigen, wenn er dadurch neue Wahrheiten von Wichtigkeit zum Vorschein kommen sieht. Dieser Umstand berechtiget mich, nun auch im Felde der Geometrie mit einem kleinen Versuche aufzutreten.

Es ist sehr wahrscheinlich, daß manche Erfindungen vom ersten Range eben nicht so viel eine Folge methodisch verbundener Schlüsse, als eines, mit einer zwar besondern und ungezwungenen, doch gründlichen Denkungsart verbundenen, Zufalles gewesen sind. Die noch in frischem Angedenken stehenden Umstände einiger kepplerisch- und newtonischen Erfindungen bestättigen es sogar — Wäre dem nicht also, so hätte die tiefforschende Einsicht unserer ältesten Vorgänger allen Erfindungsstoff, wenigst jener Wahrheiten, erschöpfen müssen, die später erfunden, und mit den älteren in einen zusammenhangenden Leitfaden verbunden worden sind. Und welche geometrische Wahrheiten sind einer solchen Verbindung nicht fähig?

Ich selbst habe, ungeachtet des grossen Abstandes von den Einsichten eines

New-

Newton, einige Proben hievon erlebet: Meine jüngst gemachte geometrisch mechanische Erfindung, über deren Werth ich Kenner urtheilen lasse, soll zum Beweise dienen. Die Ordnung, in welcher ich stuffenweise von einer Wahrheit auf die andere gekommen, wird zwar mit dem gebahnten Gleise eines Euklid nicht eintreffen, aber in Betreff ihrer Gründlichkeit dennoch keinen Zweifel übrig lassen. Und in sofern kann diese Entdeckungsart sogar zur Belehrung dienen, daß man, um Erfindungen gewisser Art zu machen, zuweilen von der strengen Methode eines Lehrsystems abgehen, und seinem durch sonst gute Grundkenntnisse unterstützten Genie einen etwas freyen Lauf gestatten müsse.

Eine einfache Mechanie, in einem dazu speciellen Falle, die der strenge Theoretiker an die letzte Stelle setzet,

wär der Anfang meiner Untersuchung — eine bloße Kleinigkeit — Allein da der Endzweck aller nützlichen Erfindungen die Anwendung seyn muß, und ich aus Erfahrung weiß, wie selten auch mechanische Kunstgriffe (in sofern sie Folgen einer geometrischen Ueberzeugung sind) bloß auf einzele Fälle sich beschränken: so verfolgte ich meinen Gegenstand mit freyen Schritten, ich suchte meine ersten Begriffe einer neuen einfachen und anwendbaren Mechanie immer weiter auszudehnen, und ihnen eine Allgemeinheit zu verschaffen, der sie nur fähig zu seyn schienen. Und da dieses im Reiche der Proportionen geschah, welches meines Erachtens der Hauptzweck der ganzen Größenlehre ist: so konnte ich in meiner Absicht um so weniger getäuschet seyn.

Der Ausgang übertraf alle Erwartung: ein so zu sagen allgemeines Pro-

por-

portioninstrument erwuchs aus der, zu meiner Absicht erforderlichen, Verbindung von nicht mehr als fünf geraden Linien, wie es gegenwärtige Abhandlung zeiget. Nicht uur diejenigen Proportionaufgaben, die man sonst ohne Zirkel nicht auflössen kann, werden durch die einfache Bewegung meines Instruments aufgelösset; sondern auch solche, welche sich dem Gebiete des Zirkels, in so weit es noch bekannt ist, und mithin zugleich den Gesetzen der Elementargeometrie, entziehen, stehen hier unter dem Gebiete gerader Linien.

Um aber dieses nicht als Folgen einer blinden Mechanie ansehen zu können, sind gegenwärtige Blätter, bis auf einige kurze Erfindungsumstände, eigentlich der Theorie gewiedmet. Die neuen Sätze, die man hier vorträgt, da man sie sonst stillschweigend zum Grunde legen müßte, werden hoffentlich, da sie meines Wissens

noch in keinem mathematischen Lehrbuche angetroffen werden, für Kenner nicht ganz gleichgiltig seyn; und eines Theils den Namen theoretischer Zusätze verdienen, anderen Theils aber Liebhabern einen Vorschmack von der Einfachheit des Instruments sowohl, als seiner in gewisser Maße unbeschränkten Brauchbarkeit geben.

Es wird sich alles dieses zu seiner Zeit vollkommener aufklären. Hier will ich nur eines Vorzugs erwähnen, welchen meine Maschine vor allen mir bekannten hat; und welcher, auch außer dem Zusammenhange mit allen übrigen, merkwürdig seyn würde. Es sind die im III. Abschnitte beschriebenen Eigenschaften zwoer gerader Linien, die sich zwischen zwoen durch eine Senkrechte verbundenen Parallelen aus beeden rechten Winkeln gezogen, winkelrecht

recht durchschneiden. Die daraus entspringende Theorie von zwoen mittlern stäten Proportionallinien wird schon dadurch merkwürdig, weil sie die Nothwendigkeit aufhebt, bei dem beschrienen Delischen Probleme zur höhern Geometrie, das ist, zu solch krummen Linien seine Zuflucht zu nehmen, für deren richtige Zeichnung kein Künstler gutstehen kann: daher der linearische Ausdruck gleichsam verloren, und in einen heterogenen, algebrischen, mit Brüchen, Irrationalitäten und mit mancherlei Ungemächlichkeiten behafteten Ausdruck verwandelt wird.

Ich führe dieses keineswegs als Mängel, sondern nur als Untersuchungswege an, welche mit der den alten Geometern so beliebten Einfachheit minder übereinkommen, als jene, wozu der III. Abschnit Anlaß giebt. Im Falle es aber

um das gerechte Lob, oder die Rettung der Analytik zu thun wäre, so versichere ich, zu Vermeidung einer schädlichen Mißdeutung, zum voraus, daß ich davon dergestalt überzeuget bin, daß ich diese verschiedene Arten, 2 mittlere Proportionallinien zu finden, aus andern Gründen unter die edelsten Kunstgriffe nnd Vorzüge der analytischen Erfindungskunst zähle.

Da nun aber die im §. 46. vorkommenden Abschnitte zwoer geraden Linien rc. nicht nur die 4 stäten Proportionalstücke in geometrischer Schärfe geben, sondern auch mit der edeln Einfalt aufs engste und schönste verbunden zu seyn scheinen; so war es mir nur darum zu thun, eine Bewegung zu Stande zu bringen, durch welche, den bereits zu andern Absichten erhaltenen Kunstgriffen unbeschadet, die für jeden einzeln Fall erforderliche

liche Lage und Größe der Linien eben so unwidersprechlich erhalten würde. Diese schmeichle ich mir auch durch die §. 47. gegebene Auflösung dergestalt bewerkstelliget zu haben, daß dadurch dem Verstande ein volles Genügen geschieht. Die Möglichkeit der dabei vorausgesetzten Bewegungen ist nicht nur an sich ungewagt, sondern auch selbst für den Anfänger der Stereometrie, der Berufs halber mit der verschiedenen Lage, und Bewegung der Linien und Flächen, ohne sie allemal in Ausübung zu bringen, bekannt seyn muß, sehr begreiflich. Eine Forderung, welche man nicht so leicht antasten kann, ohne auch die ersten 3 euklidischen Forderungen mit gleicher Gefahr zu bedrohen, und ganze Lehrsysteme zu erschüttern. Ich will aber keineswegs behaupten, daß meine Auflösung §. 47. die einzige oder allerbequemste ist; ob ich schon schwerlich glaube, daß irgend eine andere sich so un-

ge-

gezwungen nach meinem Instrumente fügen dürfte, als eben diese.

Ein Umstand, der in der Körperlehre um so mehr Aufmerksamkeit zu verdienen scheint, weil dadurch eine kleine Lücke ausgefüllet werden kann, die man seit Euklids Zeiten duldete; weil man entweder durch die Vorarbeitungen der alten Griechen schon an schwerere Auflösungen des **Delischen Problems** gewohnet war, deren Ungelegenheit man durch die mittelst der Lehre von den Kögelschnitten in anderer Absicht gemachten wichtigen Entdeckungen vielfältig belohnet fand; oder weil man sich die Möglichkeit einer so einfachen Auflösung vielleicht gar nicht beigehen ließ.

Setzt **Euklid** den Zirkel an, so gilt auch mir mein Instrument: denn bedes ist nun Mechanie. Die im §. 47. geforderte Bewegung ist darauf nicht nur

in Ausübung gebracht, sondern auch also beschaffen, daß dadurch die verlangten zwo mittlern städten Proportionallinien nicht versuchsweise, sondern nothwendig, mit einer solchen Schärfe abgeschnitten werden, als es sich nur immer von einem Instrumente gedenken läßt. Ich glaube mich also nicht zu irren, wenn ich diese Auflösung des Delischen Problems für die einfachste, kürzeste und entscheidendste unter allen bekannten linearischen Auflösungen halte.

Und dieses ist nur EIN Vortheil, den mein Instrument gewähret: mit ihm gehen fast unzählige andere der anwendbarsten Kunstgriffe zu paaren. Der Gebrauch desselben ist, so zu sagen, allgemein, und in Betreff der Aufgaben so wenig beschränkt, daß sich selbes, ohne wesentliche Veränderung, zu den manchfaltigsten Absichten richten läßt. Man findet dadurch

fast augenblicklich alle Proportionallinien und Theilungen, deren in dieser Abhandlung Erwähnung geschieht, auf mehr als einerlei Art, gleich genau, und bequem. Nebst diesem kann es die Stelle eines Meßtisches eben so wohl, als jene eines Proportionalzirkels, vertreten. Mit einem Worte: es stellet, seiner Einfachheit ungeachtet, eine Vorrathskammer von unzähligen praktischen Kunstgriffen vor; ohne daß man noch seine Anwendbarkeit für alle einzele Fälle bestimmen kann.

Liebhaber, deren wichtige Geschäfte und Lebensumstände es nicht gestatten, sich mit ausführlichen Anfangsgründen bekannt zu machen, werden dadurch in den Stand gesetzet, die am meisten praktischen Wahrheiten der Geometrie gleichsam in einem kurzen Auszuge beisammen zu sehen. Und wenn endlich die Wichtigkeit und Verbindung der geometrischen

Wahrheiten von der rechten Seite gezeiget wird; ist wohl zu zweifeln, daß mancher, der die Geometrie über die Achseln anzusehen gewohnt war, durch so einleuchtende Proben von ihrem Werthe überzeuget, und bewogen werden dürfte, sich mit den Gründen derselben genauer bekannt zu machen?

Auch die rechnende Klasse der Geometer wird bei diesem Werkzeuge ihren Antheil finden. Alle Rechnungen in ganzen Zahlen zwischen den Gränzen von 1 an bis 400, oder soweit man es mit der Länge und Theilung der Linien zu treiben gedenket, findet man mittelst schicklich angebrachter Maßstäbe genau. Insonderheit dienen die, nach Zahlengrößen eingetheilten, Maßstäbe, auser dem, daß man mittelst derselben jede verlangte Punkte augenblicklich findet, theils dazu, damit sich die mit geometrischer Ueberzeugung

nicht

nicht bekannten Liebhaber durch die Zahlen von der Richtigkeit dieser Arbeit versichern, theils auch damit der Kenner dem Unerfahrnen augenscheinlichere Rechenschaft, und einleuchtendern Unterricht geben könne.

Kommt es aber auf Brüche an, so muß der Zahlengeometer entweder dem Instrumente schlechterdings glauben, oder sich Reduktionen gefallen lassen, die mehr Kenntniß und Mühe erfordern als die Rechnung selbst; wozu aber dennoch das Instrument den zureichenden Grund enthält. Denn überhaupt ist ein Zahlenrechner immer besser daran, wenn er keine Maschine, und der Geometer, wenn er keine Zahlenrechnung brauchet. Es ist demnach wohl die eigentliche Absicht guter Instrumente, damit der Kenner der Geometrie dadurch das Gesuchte in einem totalen linearischen Ausdrucke erhalte,

und

und von dessen Genauigkeit (so weit die Schärfe der Sinne reichet) sich überzeugen könne. Und wirklich besteht der Vorzug dieses Werkzeuges darinn, daß dadurch die so beschwerliche Zahlensplitterey vermieden, und das Gesuchte allzeit, so viel es sich nur hoffen läßt, in einem vollständig linearischen Ausdrucke erhalten wird.

Ueber alles dieses lasse ich Kenner, bei Ansichtigwerdung des Instrumentes, urtheilen, von derer Billigkeit ich mir eine eben so günstige Aufnahme, und wohlgemeinte Erinnerungen, verspreche, als ich von denjenigen zu empfangen das Glück hatte, denen ich meine ersten, und unvollkommenern, Proben hierüber vorlegte.

Ich würde in einemhin den Abriß des ganzen sowohl, als in seine Theile

zergliederten Instrumentes, hindan gegeben, und mit einer umständlichen Beschreibung, und Anleitung zum Gebrauche desselben verbunden haben, wenn man nicht durch die Zeitdauer für die gute Sache zu gewinnen glaubte.

Und in der That können alle Liebhaber mit einer neuen Erfindung zufrieden seyn, die seit 3 Wochen zur gegenwärtigen Reife gediehen ist, welche beinahe alle Wünsche zu erfüllen scheint. Ich mache sie aber bei Zeiten bekannt, damit ich nicht etwa, wenn Liebhaber Veränderungen wünscheten, oder Zusätze zu machen geneigt wären, mein längeres Studiren mir einen Zeitverlust zuziehen möchte, wodurch ich keinen Dank verdienete. Ich bin in dieser Absicht bereit, Kennern das Instrument, unter gewissen Bedingungen, vorzuzeigen, und mich ihrer Anschläge zu dessen Vervollkom-

mung zu bedienen. Ansehnlichern werde ich selbst aufwarten, und bis Ende Märzens 1781 mir Zeit dazu nehmen. Alsdann aber behält das Instrument sicher, wo nicht gar die dermalige, seine unveränderliche Gestalt. Endlich dürfte wohl eine Jahresfrist verstreichen, bis man alles hieher einschlagende gehörig auseinander setzen, und sich zugleich einer andern Pflicht entledigen kann, die man wegen Lieferung eines, gleichmäßig neuen, Rechenbuchs, die **Philosophie der Zahlen** genannt, auf sich genommen hat.

Damit aber Liebhaber sich vorläufig einen Begriff machen mögen, mit welcherlei Vortheilen man sie bereichern wolle, habe ich einige der mir ohne sonderliches Nachsinnen beifallenden Aufgaben, die mittelst dieses Werkzeuges, ohne weitere Zurichtung, mit aller Behändigkeit aufgelöset werden, ohne in jene des Proportionalzirkels geflis-

sentlich einzugreifen, am Ende beigefüget. Ohne Zweifel wird sich ihre Anzahl in Kürze vervielfältigen.

DieAuflössungen gegenwärtiger sowohl, als mit der Zeit zuwachsender Aufgaben, wird man Liebhabern, die sich mit gedachtem Instrumente oder Modelle, versehen, entweder ganz, oder nur diejenigen, die sie vor der Zeit des Abdruckes verlangen, indessen handschriftlich mittheilen.

Uebrigens glaube ich, weder zum Nachtheile anderer Instrumente etwas gethan, noch in die Wahl geometrischer Liebhaber eingegriffen zu haben, wenn ich versichere, daß das Gegenwärtige die Stelle des einen, oder des andern, oder wohl gar mehrerer zugleich vertreten könne. Genug, wenn es wahr — und Kennern vom ersten Range bereits dargethan ist!

Möchte nun das großmüthige Beispiel eines berühmten Herrn Generals, dem bald nachher der große Menschen- und Wissenschaftsfreund, Graf von Thun, Excellenz, beigetreten ist, mehrere gleich günstig und mächtige Nachahmer finden, so würden die Hindernisse, die meine mathematischen Beschäftigungen nur allzusehr unterbrechen, und gleichsam im Eingange verweilen, allgemach verschwinden, und mein Trieb zu diesen gemeinnützigen Wissenschaften, so weit es meine zwar mittelmäßigen, doch durch thätigen Fleiß geübten, Kräfte gestatten, sich mit größerm Einfluß zum Nutzen und Vergnügen der Gesellschaft äusern.

Wider die übelgemeinten Censuren, welche einige Unvollkommenheiten dieses Werkchens veranlassen könnten, halte ich mich theils durch das gemeine Loos menschlicher Unternehmungen, theils auch,

und

und zwar vorzüglich, durch die Neuheit der Sache geschützet, welche keine Spur von einer fremden Nachahmung, noch minder von einem gelehrten Diebstahle, mit Grunde argwohnen läßt: ich werde also alle ungegründte Vorwürfe die Zeit gleich einem Rauche verzehren lassen. Hingegen werden mir wohlgemeinte Erinnerungen ächter — Wahrheitsfreunde ein angenehmes Geschenk seyn: ja ich ersuche darum, und versehe mich derselben um so zuversichtlicher, da ich mich derselben mit öffentlichem Danke bedienen will, und durch meine gute Absicht, eine neue nützliche Wahrheit bekannt zu machen, es zu verdienen hoffe.

Die gute Aufnahme dieses kleinen Versuches wird es entscheiden, ob man demnächst eine zweyte verbessert- und vermehrte Auflage, oder vielmehr ein vollstän-

ständig neues theoretisch-praktisches geometrisches Lehrbuch veranstalten solle; worüber man sich in einer eigenen Nachricht an das mathematische Publikum mit mehrerem erklären wird.

Wien den 10ten Jäner 1781.

Erinnerung.

Man hat gegenwärtige Sätze hauptsächlich auf die euklidischen Elemente gebauet, ohne sich doch ausdrücklich auf einzele Lehrsätze derselben zu berufen; bis man systemsmäßig alle hiemit verbundene Wahrheiten ursprünglich aus den Gesätzen der hier zum Grunde liegenden fünf geraden Linien herzuleiten Muße gewinnen wird.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Erster Abschnitt

Neue Art, jede gerade Linie auf das geschwindeste und richtigste nach jedem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

§. 1.

Albrecht Dürer, der vor mehr als dritthalbhundert Jahren der Stolz der deutschen Malerkunst war, und von den Mathematikern heutiger Zeiten noch, außer seinen andern Vorzügen, als ein Muster der Perspektivzeichnung angerühmet wird, muß der erste hier angeführet werden; nicht weil man einige dießfällige Kunstgriffe von ihm entlehnet hat, sondern weil er vorzüglich zu dieser Unternehmung Anlaß gegeben hat. In seinen zweyen Büchern de Symmetria humanorum Corporum &c. fordert er, eine gerade Linie, wel-

che die Länge des Bildnisses vorstellen solle, nach allerhand Verhältnissen von 1 : 2 an bis etwa 1 : 100 zu theilen.

§. 2.

Mein Schüler, **Anton Küßwieder** mit Namen, ein fleißiger und geschickter Nachahmer der dürerischen Kunst, und ein zu geometrischen Erkenntnissen wohl aufgelegtes Talent, unternahm es, derlei Zeichnungen nach einem eigen gewählten Maßstabe zu verfertigen. Er versuchte es, seine Linien nach **Dürers** Anschlage und **euklidischer** Vorschrift nach so vielerlei Verhältnissen, als nöthig, einzutheilen. Nicht seine Ungeduld, oder einiger Mangel an Geschicklichkeit, sondern der große Zeitverlust, bewogen ihn, mir bei Zeiten davon zu sagen.

§. 3.

Ich dachte auf der Stelle nach, und versprach ihm, durch ein vorgelegtes Muster diese Arbeit um vieles abzukürzen. Ich sagte ihm nur indessen mündlich, daß in einem Dreyecke, dessen willkürlich gezogene oder nach gleichen oder sonst verhältnißmäßigen Stücken angenommene Seite, um ein Stück verkürzet wäre, im-

immer noch ein ganzes Dreyeck übrig bliebe, in welchem man, ohne die Theile von neuem aufzutragen, oder ohne ein neues Dreyeck zu verfertigen, aufs neue aus den Gesetzen der Aehnlichkeit eine proportionirte Theilung der gegebenen ganzen Linie vornehmen könnte.

§. 4.

Dieses war seinem findigen Kopfe hinlänglich gewesen, daß er, ohne einige Ausführung oder Handanlegung gesehen zu haben, bei meiner Wiederkunft schon in Ausübung gebracht hatte, was ich sagen wollte. Seine Art zu verfahren ist in der I. Kupfertafel Fig. 1. ausgedrückt. Die Theilungspunkte sind durch beigesetzte Bruchwerthe angezeiget.

§. 5.

Die Aufgabe war so weit, als **Dürers** Sinn geht, mit wichtiger Abkürzung aufgelöset: und allem Ansehen nach würde meine ganze Untersuchung mit allen Folgen hiemit ein End gehabt haben, wenn ich die Sache just nur von der Seite, wie mein Schüler angesehen hätte; dessen Betrachtung, wie die Figur es zeiget, von der Seite ac oder dem Win-

kel c auf b zugeht. Mithin brauchet er zu seiner Theilung offenbar doppelt so viel Linien, als Theilungen vorzunehmen sind; nämlich **einmal** aus a nach allen Unterscheidungspunkten, der aus beliebig großen, gleichen oder nach gegebenen Verhältnissen zusammengesetzten Stücken der Bestimmungslinie bc; das **anderemal** von jedem dieser Punkte nach den geforderten Theilungspunkten der gegebenen ab: die den aus a gezogenen nach und nach parallel geführet werden müssen. Die Richtigkeit der Theilungen erhellet aus den ähnlichen Dreyecken, die jedesmal die ganze gegebene ab einmal ganz zu einer Seite haben, das 2temal aber eben dieselbe um ein verhältnißmäßiges Stück abgekürzt enthalten.

Als: bac ∽ b. 12; aber b 12 = $\frac{12}{13}$ bc. folglich b. = $\frac{12}{13}$ ab, und . a = $\frac{1}{13}$ ab.
ba 12 ∽ b.. 11; aber b 11 = $\frac{11}{12}$ b 12; folglich b.. = $\frac{11}{12}$ ab und .. a = $\frac{1}{12}$ ab.
ba 11 ∽ b... 10; daher ... a = $\frac{1}{11}$ ab.
ba 10 ∽ b.... 9; daher.... a = $\frac{1}{10}$ ab.
ba 9 ∽ b..... 8; daher..... a = $\frac{1}{9}$ ab.
ba 8 ∽ b —. 7; daher —. = $\frac{1}{8}$ ab.
und so von den übrigen.

§. 6.

Es läßt sich hier nicht einwenden, daß wegen Annäherung der Linien an den Theilungspunkten der a b, welche bei noch mehrern Theilen endlich gar nicht mehr merklich unterschieden sind, eine Vermischung oder Verwirrung zu besorgen sey: denn eben dieser Grund würde die Möglichkeit der Theilung nach noch kleinern Verhältnissen endlich aus der Ursache völlig aufheben, weil man etwa zwischen $\frac{1}{1000}$ und $\frac{1}{1001}$ keinen merklichen Unterschied der linearischen Theile einer kleinen Linie mehr angeben könnte. Aber dieses sey dahin gestellt.

§. 7.

Zum besondern Glücke, welches ich allein als einen wohlgerathenen Zufall ansehen muß, betrachtete ich das Ding gleich anfangs ganz anders, als mich mein Schüler verstanden hatte. Ich machte den Anfang bei der Spitze b, des Dreyecks b a 8 Fig. 2. und erhielt, da ich 1,8 mit a 8; 1,7 mit a 7; und (1,6) (1,5) (1,4) (1,3) (1,2) mit a 6, a 5, a 4, a 3, a 2 parallel zog, wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke,

$$\left.\begin{matrix} 1b8 \\ 1b7 \\ 1b6 \end{matrix}\right\} \backsim \left\{\begin{matrix} 8ba \\ 7ba \\ 6ba \end{matrix}\right.$$ u. s. f.

$b8 = \frac{1}{8}ab$, $b7 = \frac{1}{7}ab$, $b6 = \frac{1}{6}ab$ u. s. f.

Dabei waren wegen der Parallelen die Winkel 8,1,7 = 7 a 8; 7,1,6 = 7 a 6 und so von den übrigen; als eine offenbare Anzeige, daß wenn ich bei a noch den Winkel e a d = b 8 a anbringen, das ist, a d mit b c parallel ziehen würde, die obern Winkel bei a den untern bei 1 gleich seyn, folglich ich durch eine einzige gerade Linie 1,1, die ferner aus 1 mit a b parallel gezogen würde, alle diese verlangten einzeln Theile auf einmal erhalten müßte, dergestalt, daß $\frac{1}{8}$ a b (= b,8), durch die aus a nach b c gezogene a 8, $\frac{1}{7}$ a b durch a 7, $\frac{1}{6}$ a b durch a 6 ꝛc. von 1,1 (welche = a b) abgeschnitten würde; welches aus der Aehnlichkeit der Dreyecke a e 1 ∽ 1 e c, und allen übrigen, zur Genüge erhellet.

§. 8.

§. 8.

Dieses war genug, um weiter zu schließen, daß die zweyte Parallele 2 2 zween, die dritte 3 3. drey dergleichen Stücke u. s. w. von den, nach respektiven Punkten der b c, gezogenen Linien an darstellen müßte, dergestalt, daß z. B. 2 e oberhalb $= \frac{2}{8}$ a b, 2 h $= \frac{2}{7}$ a b, 5 g $= \frac{5}{8}$ a b u. s. f. enthalte. Also stellen die Abschnitte der Parallelen 1 1, 2 2, 3 3 ꝛc. welche alle der gegebenen a b gleich sind, alle mögliche Bruchszähler von der durch a b aus gedrückten Einheit vor: und wenn man zwischen den wirklich gezogenen noch unendlich viel andere Parallelen annimmt, welches doch für jede einzele Punkte zwischen den Bestimmungspunkten der b c: 1, 2, 3, 4 ꝛc. möglich und zuläßig ist, so erhält man durch die aus a gezogenen schiefen Linien alle erdenkliche, ja mögliche Abschnitte der a b geometrisch bestimmt.

§. 9.

Man erhält also durch die gezogenen Parallelen einen tausendfach größern Vortheil, als im vorigen Falle Fig. 1.

Der numerische Ausdruck reicht für die geometrische Schärfe hier nicht zu: der Geometer aber kann jede numerisch und linearisch ausgedrückten Theile genau erhalten, wenn er die Theilungszahlen oder Bestimmungspunkte der b c nach der Beschaffenheit der Aufgabe oder Forderung einrichtet.

§. 10.

Ein Leser, der dieses mit geometrischer Aufmerksamkeit ansieht, nimmt alsogleich wahr, daß die Stücke 2 i $= \frac{2}{4}$; 3 g $= \frac{3}{6}$; 4 e $= \frac{4}{8}$ rc. identisch und alle $= \frac{1}{2} =$ 1 l sind, und eines für das andere gebraucht werden können: Ein gleiches Bewenden hat es mit 1 k $=$ 2 g $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; u. m. a. woraus der Schluß fällt, daß man diejenigen Theile, deren Nenner ein Faktor von einem anderen Theilungsnenner ist, allemal von einem solchen Nenner nehmen könne, der durch den gegebenen kleinern theilbar ist; das ist, $\frac{3}{6}$ oder $\frac{4}{8}$ anstatt $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{6}$ für $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{6}$ für $\frac{2}{3}$ u. d. m.

§. 11.

Dieser Vortheil wird bei Anhäufung der Theile beträchtlich, und man findet, daß, wenn man b c nur bis auf 30 gleiche Stücke verlängert, man in dieser Rücksicht aus a nach keinen andern Punkten der bc Linien zu ziehen nöthig hat, als nach 30, 29, 27, 25, 23, 19, 17, 16, 13, 11, 7, das ist, nach solchen Punkten der bc, deren Zahlennenner entweder Primzahlen oder Potenzen der niederern Zahlen sind. Die übrigen Theile werden aus diesen mit geringer Mühe gefunden; als:

unmittelbar: $\frac{1}{2}=\frac{8}{16}=\frac{15}{30}$ $\frac{1}{5}=\frac{5}{25}=\frac{6}{30}$ $\frac{1}{9}=\frac{3}{27}$

$\frac{1}{3}=\frac{9}{27}=\frac{10}{30}$ $\frac{1}{6}=\frac{5}{30}$ $\frac{1}{10}=\frac{3}{30}$

$\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$ $\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$ $\frac{1}{15}=\frac{2}{30}$

Mittelbar werden die übrigen Theile aus diesen gefunden;

als: $\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ $\frac{1}{24}=\frac{2}{3}-\frac{5}{8}$

$\frac{1}{14}=\frac{1}{2}-\frac{3}{7}$ $\frac{1}{21}=\frac{1}{3}-\frac{2}{7}$ $\frac{1}{26}=\frac{1}{2}-\frac{6}{13}$

$\frac{1}{18}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}$ $\frac{1}{22}=\frac{1}{2}-\frac{5}{11}$ $\frac{1}{28}=\frac{2}{7}-\frac{1}{4}$

Da diese Erörterung eben nicht zum Gebrauche, sondern zur Aufklärung gehöret, die der Zahlenrechner bei Betrachtung der linearischen Theile benutzen kann; so will ich, da die Berechnung bereits geschehen ist, die noch kleinern

Stücke einer Linie hieher setzen, welche mittelbar bis $\frac{1}{100}$ gegeben sind, wenn man bc in 32 gleiche Stücke zergliedert annimmt. Alsdann ist:

$\frac{1}{33}=\frac{4}{11}-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{55}=\frac{1}{5}-\frac{2}{11}$	$\frac{1}{78}=\frac{1}{6}-\frac{2}{13}$
$\frac{1}{34}=\frac{1}{2}-\frac{8}{17}$	$\frac{1}{56}=\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{80}=\frac{13}{16}-\frac{4}{5}$
$\frac{1}{35}=\frac{3}{5}-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{57}=\frac{1}{3}-\frac{6}{19}$	$\frac{1}{84}=\frac{1}{3}-\frac{9}{28}$
$\frac{1}{36}=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{58}=\frac{1}{2}-\frac{14}{29}$	$\frac{1}{85}=\frac{3}{5}-\frac{10}{17}$
$\frac{1}{38}=\frac{1}{2}-\frac{9}{19}$	$\frac{1}{60}=\frac{4}{15}-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{87}=\frac{10}{29}-\frac{1}{3}$
$\frac{1}{39}=\frac{1}{3}-\frac{4}{13}$	$\frac{1}{62}=\frac{1}{2}-\frac{15}{31}$	$\frac{1}{88}=\frac{3}{8}-\frac{4}{11}$
$\frac{1}{40}=\frac{2}{5}-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{63}=\frac{4}{9}-\frac{3}{7}$	$\frac{1}{90}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$
$\frac{1}{42}=\frac{1}{2}-\frac{10}{21}$	$\frac{1}{65}=\frac{8}{13}-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{91}=\frac{2}{13}-\frac{1}{7}$
$\frac{1}{44}=\frac{3}{4}-\frac{8}{11}$	$\frac{1}{66}=\frac{5}{6}-\frac{9}{11}$	$\frac{1}{92}=\frac{6}{23}-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{45}=\frac{2}{9}-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{68}=\frac{1}{4}-\frac{4}{17}$	$\frac{1}{93}=\frac{1}{3}-\frac{10}{31}$
$\frac{1}{46}=\frac{1}{2}-\frac{11}{23}$	$\frac{1}{69}=\frac{2}{3}-\frac{15}{23}$	$\frac{1}{95}=\frac{4}{19}-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{48}=\frac{15}{16}-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{70}=\frac{3}{10}-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{96}=\frac{4}{19}-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{50}=\frac{1}{2}-\frac{12}{25}$	$\frac{1}{72}=\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{99}=\frac{5}{11}-\frac{4}{9}$
$\frac{1}{51}=\frac{6}{17}-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{75}=\frac{1}{3}-\frac{8}{25}$	$\frac{1}{100}=\frac{1}{4}-\frac{6}{25}$
$\frac{1}{52}=\frac{1}{4}-\frac{3}{13}$	$\frac{1}{76}=\frac{5}{19}-\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{54}=\frac{1}{2}-\frac{13}{27}$	$\frac{1}{77}=\frac{8}{11}-\frac{5}{7}$	

§. 12.

Ein Liebhaber der rechnenden Geometrie kann mit dieser Art von Theilung noch weiter fortfahren, und Theile von allen höhern Nennern angeben, die keine höhere Faktoren als

jene

jene unter 33 haben. Aber welche unsägliche Mühe wird nicht erfordert, um erstlich nur jene Stücke zu finden, deren Zähler die Einheit ist, wie in den vorhergehenden Fällen! Der ausübende Geometer wird ihm auch dafür wenig danken, wenn er leichtere Mittel findet, seine gesuchte Größe auf einmal im Ganzen auszudrücken. Man hat hieraus Anlaß genommen, auf besondere Kunstgriffe zu gedenken, und die ausgesuchtesten hier anzumerken, für dienlich befunden. Wie folget.

§. 13.

Die Vermischung der Linien, welche bei Anhäufung der Theile sich um den Vereinigungspunkt a ereignet, gab mir Anlaß, die unterhalb der gesuchten sich befindlichen Theilungslinien mit einem geradelinichten Papiere, oder dergleichen, bis an den Vereinigungspunkt a zu bedecken.

Was war natürlicher, als hieraus einen neuen allgemeinen Kunstgriff für alle Abschneidungslinien herzuleiten? Ich nahm also den Punkt a als die Achse einer Linie an an, um welche sich an unter einem jeden Winkel

nach

nach allen Bestimmungspunkten der unbestimmt verlängert und getheilten bc Fig. 2. beliebig bewegen könnte.

§. 14.

Erklär. Man nenne die an von der Art ihrer Verrichtungen die **Wendungslinie.**

§. 15.

Damit aber auch alle erdenkliche bestimmte Theile der ab um so leichter und geschwinder gefunden werden könnten, hielt ich ein für allemal die Parallelen 1 1, 2 2, 3 3. u. s. f. mit Vorsatze durch Zahlen bemerket bei, damit durch derer Behuf jede Punkte der Bestimmungslinie bc leichter gefunden, und allenfalls die linearischen Verhältnisse mit Zahlen so genau, als thunlich, ausgedrückt werden möchten.

§. 16.

Alles dieses galt nur noch, um alle mögliche Theilungsverhältnisse der begränzten Linie ab geometrisch zu bestimmen: Aber nun war ich auf eine allgemeine Art bedacht, wie ich alle erdenklichen gerade Linien gleich geschwind

und

und scharf nach jedem numerisch und linearischen Ausdrucke bestimmen könnte.

§. 17.

Der Plan war bald gemacht: ich nahm die ab mit beibehaltener Richtung von veränderlicher Größe =am an; die beliebig angenommene Bestimmungslinie bc, ließ ich sich an der jeder gegebenen Länge nun gleichenden am dergestalt auf- und abwärts bewegen, daß ihre Richtung einerlei, oder sich beständig parallel blieb, und dadurch alle erdenklichen parallelen Entfernungen oder Linienlängen ab, zwischen ad und bc zum Vorschein kommen mußten. Dieses galt für jede ganze Linie ab: Für alle erdenkliche Theile derselben diente mir die um ihre Achse a bewegliche an, wie im vorigen Falle §. 13.

§. 18.

Meine Voraussetzung, die ich hier zum Grunde lege, scheint es nöthig zu seyn, mit ein paar Worten zu rechtfertigen. Man saget in der Geometrie, daß ein Parallelogramm beschrieben werde, wenn eine Seite desselben,

deren

deren die solches einschließen, sich parallel an der andern herunter beweget. Dieses zeiget, daß man die Möglichkeit der parallelen Bewegung von bc in der Geometrie längst zugelassen. Auch saget man, daß ein Zirkel beschrieben werde, wenn eine gerade Linie sich um einen Endespunkt herum beweget. Dieses geschiehet im gegenwärtigen Falle mit an.

§. 19.

Folglich habe ich mir noch nichts erlaubet, was nicht mit der äußersten Schärfe der Geometrie bestehen könnte. Die praktische Ausführung wird alles dieses noch mehr erheben, und in ein größeres Licht setzen.

Zweyter Abschnitt

von Erfindung der Proportionallinien zu einigen gegebenen.

§. 20.

Die Durchschnitte der wirklich- und möglichen Parallelen 1 1, 2 2, 3 3, u. s. f. durch die Wendungslinie a n legten bei jeder Rich-

Richtung derselben eine unzählige Menge ähnlicher Dreyecke vor Augen. Dieses gab Anlaß, den zweyten Schritt über die anfänglich gehegte Absicht der bloßen Theilung einzeler Linien zu machen.

§. 21.

Aus der Ueberzeugung also, daß hier beständig a 1 : a p = a 4 : a s. u. s. f. war der Zuschnitt gemacht, ohne alle fernere Zubereitung **zu zwoen gegebenen die dritte**, wie auch **zu dreyen gegebenen die vierte** Proportionallinie in allen Fällen zu finden.

§. 22.

Man fand **zu zwoen gegebenen die dritte**, da man z. B. setzte; a 5 : 5 t = a 4 : 4 s, wo 5 t = a 4 gesetzet ist; oder a 4 : a u = a 5 : a w; wo a u = a 5 gesetzet wird; welches sich in allen Fällen sehr leicht thun läßt, weil bei jeder Richtung der Wendungslinie a n nicht nur die Größe ihrer Abschnitte a p, a q, a r, &c. sondern auch die Abschnitte der Parallelen 1 p, 2 q, 3 r u. s. f. in Ansehung der beständigen Stücke a 1, a 2, a 3 rc. verändert werden, so, daß

man dadurch im ersten Falle alle größeren, im 2ten alle kleineren Linien, als a 1, a 2, a 3 ꝛc. erhalten kann.

§. 23.

Der Allgemeinheit wegen ist hier zu erinnern, daß die Endespunkte der von a aus gezogen angenommenen geraden Linien keineswegs in die Unterscheidungspunkte 1, 2, 3 ꝛc. der a d einfallen dürfen, sondern sowohl in diese als in jede Zwischenräume. Ein Umstand, wozu der Zahlengeometer schweigen muß.

§. 24.

Zu dreyen gegebenen wird die vierte Proportionallinie durch die eben gezeigten Kunstgriffe gefunden. Wenn man hier ein für allemal aus den Anfangsgründen weiß, daß:

$$a4 : a5 = as : at$$
$$a4 : a5 = 4s : 5t$$
$$a4 : 45 = as : st \quad \text{u. s. f.}$$

so sieht man Arten genug, deren man sich bedienen kann, um die dritten oder vierten Proportionallinien zu finden; wenn man das 4te Glied obstehender Proportionen als das Gesuchte ansieht.

§. 25.

Bei eben beschriebener Art, die dritt- und vierte Proportionallinien zu finden, waltet jedoch diese Schwierigkeit ob, wenn es ja eine Schwierigkeit zu nennen ist, daß man zwischen den Unterscheidungspunkten 1, 2, 3 ꝛc. Parallelen annimmt, die nicht wirklich vorhanden sind. Es würde nicht unthunlich seyn, diesen Anstand durch eine veränderliche Parallele nach Art der bc. §. 17. zu heben: aber der nachfolgende Kunstgriff scheint erheblicher zu seyn:

§. 26.

Denn es ist aus der Natur der Parallelen ad, und bc Fig. 2. begreiflich, daß jede obere Dreyecke jeden unten korrespondirenden ähnlich sind; z. B. ae1 ∽ 1e8,

	ag2		2g6	
oberhalb ist also	af4	∽	4f7	unterhalb.
	ah3		3h5	

Da nun die Wendungslinie an die Stelle aller Abschneidungslinien a8, a7 ꝛc. vertreten kann, so können die obigen Dreyecke alle vorige

obere,	ap1		1py	alle
das ist,	aq2	∽	2qy	vorige
	ar3		3ry ꝛc.	untere

nacheinander bis ins unendliche vorstellen, und dadurch alle erdenkliche Proportionallinien bestimmet werden.

§. 27.

Zum voraus nimmt man hier wahr, daß es auf die Länge der a b nur in sofern ankommt, daß die Parallelen a d und b c nach Beschaffenheit der Linien, die gegeben oder gesucht werden, nicht gar zu weit entfernt sind. Alle dießfällige Weitläuftigkeiten werden auf einmal folgender Gestalt vermieden.

§. 28.

Man stelle Fig. 3. bc mit ad aus einem beliebigen Punkte der am parallel.

Auf die Wendungslinie am trägt man ao, als die erste der gegebenen Linien.

An o setzet man ou als die dritte.

An den Endespunkt u verschiebet man die veränderliche Parallele bc.

Durch o zieht man eine andere bewegliche Linie qw, und wendet sie so lange um den Punkt o, als seine Achse, bis or = der 2ten in der Ordnung der gegebenen;

So ist ot = der 4ten Gesuchten.

Beweis. Die Dreyecke sind ähnlich, aor ∽ tou; folglich ao : or = ou : ot.

§. 29.

Zusatz. Eben dieses erhält man, wenn man, anstatt die unbestimmte Linie qw um ihre Achse o zu wenden mit or aus o einen Zirkel beschreibet, und aus dem Durchschnittspunkte e oder r eine gerade Linie durch o bis an bc zieht; und es wird allemal ao : eo = ou : of, und of = or.

§. 30.

Zusatz. Zu zwoen gegebenen wird die dritte auf gleiche Art gefunden, wenn or = ou angenommen wird.

§. 31.

Anmerkung. Wenn man bc durch die am in dem Punkte b beschränkt annimmt, so muß man die 4 Proportionallinien allzeit so ordnen, daß die längsten 2 Linien auf die Wendungslinie an zu liegen kommen, welches allemal geschehen kann. Denn es sey ao : or = ou : ot und or > ao; so ist auch aus den Gründen der Proportion ot > ou. Und da es beliebig ist or auf an zusetzen, welche hier immer nach Erforderniß beweglich ist, so

werden die kleinern Abschnitte (oder Proportionallinien) dadurch nothwendig auf qw verwiesen, wie es aus den 8 möglichen Versetzungen 4 einzeler Proportionalglieder erhellet. Und eben daher wird auch das 2te längere Stück, welches in diesem Falle das Gesuchte ist, auf on fallen, und durch die durch den Punkt t geführte veränderliche Parallele bc in u abgeschnitten werden müssen.

§. 32.

Erklärung. Wir wollen die Linie qw wegen ihrem vielfältigen Gebrauche mit einem ihrer Lage angemessenen Namen **Querachse** nennen.

Dritter Abschnitt.

Von Erfindung mittlerer Proportionallinien zwischen zwoen gegebenen.

§. 33.

Bisher waren die Winkel bei a und b Fig. 2. 3. willkürlich; genug wenn ad, bc Parallel waren: aber nun, da es auf mitt-

lere

lere Proportionallinien angesehen war, wußte ich mir in der Geschwindigkeit nicht zu helfen. Mein erster Rath war der den mittlern Proportionallinien gleichsam angeschaffene rechte Winkel. Ich gab meiner Figur, Fig. 4. durchaus eine rechtwinklichte Richtung; so daß mir die Senkrechte xk die xy zur mittlern Proportionallinie zwischen ay, yk; die rp aber die ro zur gleichfalls mittlern zwischen ao, op machen mußte. u. s. f. Aber hier war die Ungelegenheit wieder da, die Senkrechte kx, rp, die nicht vorhanden war, anzunehmen oder zu ziehen.

§. 34.

Um nun nicht diese Nothparallelen durch eine neue bewegliche Parallele §. 25. ersetzen, und meine Vorausbedingungen aufhäufen zu dürfen, warf ich meine Augen auf alle Bestandtheile meiner Figur, und sah den zwar beweglich, aber beständig rechten Winkel bey b stark an, und stellte ihn den Abschnitten der Wendungslinie ao + ou, als einer Hypothenuse, gegenüber, so daß to die mittlere Proportionallinie zwischen beiden ist: die or, op, xy, die ich vermöge voriger Betrachtung §. 33. zur gegen-

wärtigen Absicht unschicklich fand, ließ ich indessen fahren: nur suchte ich eine zur gegenwärtigen Absicht nöthige allgemeine Regel, durch Hilfe blosser Parallelen eine mittlere Proportionallinie zu finden. Die obige Voraussetzung §. 18. war auch zu dieser Absicht hinlänglich.

§. 35.

Es ist aus den Anfangsgründen klar, und man kann sich, wenn man durch die bewegliche Senkrechte bc den daran beständig stossenden Endespunkt u der au durch alle Punkte eines Viertelzirkels treibt, überzeugen, daß man durch alle mögliche Richtungen der au vom halbrechten Winkel = 45° an, alle mögliche einfache mittlern Proportionallinien zwischen jeden möglichen zweyen Stücken der au erhalten müsse; wenn man zu gleicher Zeit unendlich viele Senkrechte aus gleich viel Punkten der au nach dem, beständig neuen Punkten gegenüber stehenden, rechten Winkel b zieht.

§. 36.

Wendet man nun die au aufwärts nach T; so daß die bc inzwischen mit dem Punk-

te u in T und die ganze bc in BC einfalle, so kann die mittlere Proportionallinie zwischen den Stücken der aT = au unmöglich mehr in den rechten Winkel b fallen oder etwa = et seyn; sonst müßte aT = aH seyn, welches sich widerspricht: sondern es muß die mittlere Proportionallinie zwischen den Stücken der nun also liegenden aT in einen Punkt fallen, welchen die am, und die durch T auf am senkrecht gezogene Linie BC, gemeinschaftlich haben, welches bei N geschieht.

§. 37.

Zusatz. Und so wird bei weiterer Hinaufwendung der au der **Durchschnittspunkt** E und der Winkel N sich dem Punkte a beständig nähern, bis beede in a ganz verschwinden. Wir nennen ihn **Unterscheidungspunkt.**

§. 38.

Zusatz. Ein gleiches wird erfolgen, wenn die au weiter abwärts gesenket wird, bis der Winkel mau = 45°, da dann der Durchschnittspunkt y in die Hälfte der au fällt, die

mittlere Proportionallinie y P = a y = y u wird, und dann in eben der Ordnung abwärts, wie vorhin aufwärts abnehmen muß.

§. 39.

Zusatz. Man hat also, um gewisser Vortheile Willen niemals nöthig, die a u um mehr als 45° zu neigen.

§. 40.

Zusatz. Man kann die Durchschnittslinien P x, q w, g f, D h, und alle, die sich durch a u senkrecht ziehen lassen, als eine einzige ansehen, die sich an der a u nach allen Punkten derselben nach Erforderniß unter einer beständig senkrechten Richtung verschieben läßt. §. 28.

§. 41.

Zusatz. Wenn man die gerade Linie b c an der a m unter einer gleichfalls senkrechten Richtung auf und ab beweget, und der b c eine unbiegsame Steife giebt, so wird sie den durch einen Stift bestimmten Endespunkt u der a u dergestalt aufwärts treiben können, bis die zwischen die äußersten Stücke a o, o u senk-

recht

recht verschobene qw der bc in t begegnen, und der Punkt t die mittlere Proportionallinie ot genau bestimmen und abschneiden muß.

§. 42.

Anmerkung. Der Sinn des §. 36. geht nicht dahin, als würde durch die successive Wendung der au die Natur zwoer und der nämlichen Stücke also verändert, daß daraus eine andere mittlere Proportionallinie entstehen müßte; sondern es ist so zu verstehen, daß durch diese successive Bewegung beständig neue Stücke der au anzunehmen sind, zwischen welchen hiedurch die mittleren Proportionallinien einzig und nothwendig bestimmet werden: wodurch eben der Zweck gegenwärtiger Untersuchung in Betreff einer allgemeinen Regel, eine mittlere Proportionallinie mittelst der Parallelen zu finden, erreichet ist.

Aufgabe.

§. 43.

Zwischen zwoen gegebenen geraden Linien ae, eH eine mittlere Proportionallinie zu finden. Fig. 4.

Auflösung. Setzet die gebenen a e, e H nach der Länge aneinander auf die Wendungslinie a v.

Bemerket den Endespunkt H, so es beliebig, mit einem durchgesteckten Stifte, oder einem andern genauen Merkmale.

Verschiebet die bewegliche Senkrechte, oder Querachse f g so, daß sie den Unterscheidungspunkt e auf a v, oder der bestimmten a H unbeweglich durchschneide.

Neiget a v so weit herunter, daß der Winkel w a n nicht zu groß, d. i. damit f g oberhalb dem vermeinten Punkte t die a m durchschneide.

Stellet den Punkt H solchergestalt an die steife Bestimmungslinie b c, daß sie die a H durch ihre Aufwärtstreibung bewege.

Schiebet b c so lange an a m in senkrechter Richtung aufwärts, bis die Querachse f g, mittelst Hinauftreibung der a v in den Endespunkt t der b c einfalle.

So ist t e die verlangte mittlere Proportionallinie.

Der

Der **Beweis** ist wegen der rechten Winkel H t a und e aus den Anfangsgründen klar, folglich hier überflüßig.

Aufgabe.

§. 44.

Eine gegebene gerade Linie L, Fig. 4. nach dem äußerst- und mittelsten Verhältnisse zu theilen.

Auflösung. Nehmet a 7 = L;
Setzet 7 T = ½ L an a 7 = L senkrecht;
An den Endespunkt T wendet a v;
Von a T schneidet das Stück T U = ½ a 7 = 7 T ab
Machet a x = a U.
So ist a 7 in dem Punkte x auf die verlangte Art getheilet.

Der **Beweis** kann hier am schicklichsten nach der im II. Buche §. 7. der Euklidischen Elemente befindlichen Art geführet werden, den ich hier nicht abschreiben will.

§. 45.

Da ich meinem Verlangen auf diese Art ein Genügen gethan, setzte ich meine Betrach-

tungen und Vernunftschlüsse in der angefangenen Ordnung fort. Der nächste Schritt war nun, zwo mittlere Proportionallinien zu suchen. Bevor ich zu dieser Absicht eine neue Zeichnung ausdachte, oder aus den Schriften älterer Zeiten meine Auflösung entlehnte; sah ich meine Figur, die im ganzen, und einfach betrachtet, aus 5 Hauptlinien, als:

1) Aus der Grundlinie a d,
2) Aus der Richtungslinie a m,
3) Aus der Wendungslinie a n,
4) Aus der Bestimmungslinie b c,
5) Aus der Querachse q w bestand; deren Punkte a, b, u, r, o durch die Bewegung der a n um ihre Achse a theils nothwendig, theils hypothetisch bestimmt sind, abermal nach ihrer ganzen Lage an. Da ich nun die vorhin §. 34. außer Acht gelassene o r aufs neue in Betrachtung zog, entdeckte ich folgende so schöne als für meine Absicht völlig zulangende Wahrheit:

Lehrsatz.

§. 46.

Wenn zwo gerade Parallellinien a d, b c durch eine Senkrechte a b verbunden werden, so schneiden die aus den rechten Winkeln bei a und b durcheinander senkrecht gezogenen geraden Linien t r, a u einander in o dergestalt, daß alle 4 Abschnitte, in der Ordnung, in welcher sie aufeinander folgen, in einer stäten Proportion stehen, das ist: uo : ot = ot : ao = ao : or oder :: uo : ot : ao : or.

Beweis. Da a t u = r a t rechte Winkel sind, ingleichen auch bei o lauter Rechte, so sind die Dreyecke u o t ∽ t o a ∽ a o r; folglich uo : ot = ot : oa = oa : or; das ist, alle 4 Abschnitte sind in einer stäten Proportion.

Aufgabe.

§. 47.

Zwischen zwoen gegebenen geraden Linien L, M zwo mittlere stäte Proportionallinien zu finden.

Fig. 4.

Fig. 4.

Auflösung. Trag die Linie L dergestalt auf av oder an, daß ein Endespunkt derselben H an die Bestimmungslinie bc, wo sie immer ihre Stelle in BC oder PG einnimmt, beständig anstoße.

Den andern Endespunkt nimm dergestalt in e an, daß, wenn die Querachse fg nach Erforderniß auf oder ab beweget wird, die ganze Linie eH mit ihrem obern Endespunkte e auf- oder abwärts in gleicher Richtung mit av beweget werde; das ist solchergestalt, daß die Punkte a, e, H beständig in eine gerade Linie fallen.

In dieser Absicht befestige an dem Endespunkte H nach §. 43 einen hervorragenden feinen Stift.

An den obern Endespunkt e der eH = L setzte die gerade Linie eQ = M auf die Querachse fg dergestalt, daß die Achse sowohl selbst, als der durch eQ beschränkte Theil derselben, die auf der Wendungslinie av verschieblich angebrachte eH beständig in senkrechter Linie begleite.

Den Endespunkt Q bemerke mit einem unten hervorragenden Stifte dergestalt, daß dieser

Punkt

Punkt Q beständig an der Schärfe der unterhalb unbeweglich befestigten Grundlinie a d anstreichen könne.

Sind nun solchergestalt die Punkte Q und H, der erste an die Grundlinie a d, der zweyte an die Bestimmungslinie b c angestellt, so können diese zwo Linien sich einander weder nähern noch voneinander entfernen, es werde dann die Entfernung des Punktes e von a, mithin die Lage der a v verändert. Beobachte nun die Lage der Querachse f g, ob solche mit ihrem untern Arme e g oberhalb, unterhalb, oder durch den Endespunkt b der Bestimmungslinie b c durch a m laufe, oder welches einerlei ist, in den rechten Winkel bey b einfalle.

Im letzten Falle ist das Gesuchte aufs erstemal gefunden.

Im ersten Falle kannst du mittelst zweener Finger durch langsames Abwärts- oder Aufwärtsbewegen des Punktes e und der gesellschaftlichen e H, und b c, den Linien e H und e Q die gehörige Lage dergestalt mit geringer Mühe verschaffen, daß die an dem Punkte H anliegende Bestimmungslinie b c mit ihrem Endespunkte b in den Durchschnittpunkt

der

der am und fg fallen muß, mithin die Länge der aH und bQ bestimmet, und die städe Proportion der eH : et : ea : eQ oder L : et : ea : M nach Verlangen aufs genaueste erhalten werde.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung ist aus dem vorhergehenden Lehrsatze §. 46. klar.

Aufgabe.

§. 48.

Zwo gegebene gerade Linien a, b, Fig. 5. Tab. II. also zutheilen, daß alle 4 Abschnitte in einer städen Proportion fortgehen.

Auflösung. Machet ch = a.

An den Endespunkt c setzet ce = b unter einem rechten Winkel.

Ziehet eh, und mit ihr die Parallele cd.

Aus c ziehet cf auf eh senkrecht.

Aus f ziehet fg mit ec parallel.

Machet ai = ho, bk = fo; so sind die Stücke :: ai : bk : i : k : städs proportionirt.

Beweiß. Wegen der Parallelen ist fg = ce = b; und nach obigen Lehrsatze §. 46. ho : of : oc : og in städer Proportion; folglich auch ai : bk : i : k.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 49.

In einem jeden rechtwinklichten Dreyecke schneiden die geraden Linien, die aus dem, durch die Senkrechte des rechten Winkels bestimmten, Punkte der der Hypothenuse nach den zwo übrigen Seiten eines solchen Dreyecks senkrecht gezogen werden, diese Seiten nach einer stäten Proportion, so daß Fig. 6. EC : ED : EB : EH.

Beweis. Ziehet BG mit AC parallel; DH mit AB.

So ist DH = AB, EH = AF.

Es ist aber laut obigem Lehrsatze §. 46.

CE : ED : EB : EH, das ist:

CE : BF : BE : AF in stäter Proportion.

§. 50.

Zusatz. Hätte man nur eine senkrechte DE oder FD gezogen, so hätte man das übrige durch die Parallele KE oder FI mit AC erhalten.

Vierter Abschnitt

einige Betrachtungen der Proportionallinien in Beziehung auf den Zirkel und die Parallelen.

Lehrsatz.

§. 51.

Vier ungleich große stäte Proportionallinien können im Zirkel nach dieser Ordnung von zwoen Sehnen wechselseitig nicht abgeschnitten werden. Fig. 6.

Beweis. Wäre es möglich, 4 stäte, aber ungleich große Proportionallinien im Zirkel nach obiger Ordnung zu beschreiben, so müßte der Umkreis durch alle 4 Endespunkte gehen.

Es muß aber im vorigen Falle der Zirkel, welcher durch die 3 Punkte D, B, H gehet, wegen dem rechten Winkel bei B, die DH zum Durchmesser haben.

Aus gleichem Grunde muß der Zirkel, der um B, D, C beschrieben wird, wegen dem rechten Winkel bei D die BC zum Durchmesser haben; folglich müßten diese beede Zirkel den gemein-

schaft-

schäftlichen Mittelpunkt E haben, und EC = ED = EB = EH seyn.

Es sind aber diese Linien vermög der Voraussetzung ungleich; folglich können im Zirkel 4 stäte Proportionallinien nach obiger Art nicht beschrieben werden.

§. 52.

Zusatz. Dieser Beweis zwar gründet sich auf die rechten Winkel: daß aber sich dieses Gesetz auch auf die schiefwinklichten Abschnitte erstrecke, wird also bewiesen:

Gesetzt es sey im Zirkel Fig. 7. und 6. ae = CE, de = DE, ce = BE, be = EH. So ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke, und der Voraussetzung Fig. 7. ae: ed = ec: eb; und Fig. 6. CE: DE = EB: EH. Es ist aber auch: ae: ec = ed: eb. Wäre es nun möglich, daß die 4 stäten Proportionallinien in besagter Ordnung folgen könnten, so müßte auch seyn können ae: ec = be: de; d. i. ed: eb = eb: de, welches abermal bei ungleichen Größen nicht möglich ist.

§. 53

Zusatz. Folglich können im Zirkel auch keine andere Proportionallinien in obiger Ordnung aufeinander folgen.

Lehrsatz.

§. 54

Um die Endespunkte 4 ståter Proportionalabschnitte låßt sich alsdann ein Zirkel beschreiben, wenn zween dieser Proportionalabschnitte verwechselt werden. Fig. 6. 8.

Beweis. Wenn die 3 ståten Proportionallinien CE : ED : EB also aneinander gesetzet werden, wie ce : ed : eb Fig. 8. es zeiget, so låßt sich um diese 3 Punkte ein Zirkel beschreiben. Wenn man nun im Zirkel die ce bis an den Umkreis verlångert, so wird

ce : ed = eb : ef : es ist aber nach gegenwårtiger Anordnung ce : ed = eb : EH; daher ef = EH; folglich ce : ed = eb : ef in ståter Proportion, und im Zirkel beschrieben.

Lehrsatz.

§. 55.

Wenn man Fig. 6. zwischen den unverrückten Parallelen BG, AC die AB = DH nach und nach durch alle Punkte der BC so fort beweget, daß sie sich beständig parallel bleibt, so werden durch diese successive Bewegung der AB nach und nach alle mögliche Proportionaltheilungen beder Linien AB und BC zum Vorscheine kommen.

Beweis. Wäre es anders, so müßte es so geschehen, daß etwa die HE um einen unmerklichen Theil wüchse, ohne daß bei BE, eine vollkommen ähnliche Veränderung statt fände: dieses aber streitet wider die vorausgesetzte gleichförmige Bewegung, und wird noch folgendermassen erwiesen.

Lehrsatz.

§. 56.

Wenn 4 Größen Proportional sind a : b = c : d, so ist es nicht möglich, daß ein äußeres Glied um eine bestimmte oder unendlich kleine Größe q wachse, und ein mittlers Glied um

eben diese Größe abnehme, es werde dann die Proportion zerstöret.

Beweis. Wäre es möglich; und so dann $a : b = c : d$ und zugleich $a + q : b = c - q :$ d; so sey $\frac{a}{b} = e = \frac{c}{d}$; demnach $a = be$, $c = de$, und $be : b = de : d$.

Und wegen gleichem Werthe der Buchstaben $be + q : b = de - q : d$; hieraus aber für den letzten Fall $bed + dq = bed - dq$; das ist $+ dq = - dq$, welches sich widerspricht.

§. 57.

Zusatz. Also müssen durch die successive Bewegung der AB, durch alle Punkte der BC, Fig. 6. nach und nach alle mögliche Proportionaltheilungen zum Vorschein kommen.

§. 58.

Zusatz. Verändert man die Entfernung der Parallelen BG, AC, Fig. 6. so, daß dadurch ein schiefer Durchschneidungswinkel E entsteht, so werden zwar aus gleichem Grunde durch die successive Bewegung der AB, durch alle Punkte der BC nach und nach eben alle mögliche

liche Proportionaltheilungen entstehen; folglich, da unter diesen möglichen auch die stäte Proportion aller 4 Stücke begriffen ist, auch diese erfolgen, aber so leicht nicht bestimmet werden können.

§. 59.

Zusatz. Also hat das rechtwinklichte Parallelogramm gewisse Vorzüge vor dem Zirkel und allen schiefwinklichten Parallelogrammen. Ein Gegenstand, der bei weiterer Untersuchung von weitern nützlichen Folgen seyn dürfte.

Lehrsatz.

§. 60.

In einem Zirkel Fig. 7. kann eine Sehne ab durch alle Punkte der andern cd nicht dergestalt geführet werden, daß dadurch alle mögliche Proportionaltheilungen entstehen.

Beweis. Wäre es möglich, so müßte nicht nur die größere ab die kleinere cd halbiren können, sondern auch diese die größere: welches erforderte, daß der Mittelpunkt der kleinern Sehne eben so weit vom Mittelpunkte abstünde, als der größern; welches sich widerspricht.

§. 61.

Anmerkung. Zwischen zwoen Parallelen BG, AC, Fig. 6. können sich dergleichen durchkreuzende Linien nicht nur halbiren, sondern es muß auch zu gleicher Zeit geschehen.

§. 62.

Anmerkung. Bei genauerer Vergleichung des Zirkels und der Parallelen findet man diesen sehr wichtigen Unterschied in Ansehung der dadurch erhaltenen Proportionaltheilungen:

1) Stehen die Abschnitte zwischen den Parallelen in geradem, im Zirkel im verkehrten Verhältnisse untereinander. Weswegen auch die Verbindungssehnen a c und b d im Zirkel Fig. 7. Antiparallelen von einigen genannt werden, welche alsdann wirklich parallel sind, wenn zween Schenkel verwechselt werden.

2) Zwischen den Parallelen verhalten sich die ganzen Linien wie ihre Abschnitte, im Zirkel niemals, auser bei 2 Durchmessern.

§. 63.

Zusatz. Alle Proportionaltheilungen, die im Zirkel, durch die Durchschneidung zwoer

Seh-

Sehnen entstehen, sind von denen, welche von 2 den vorigen stückweise gleichen geraden Linien zwischen zwoen Parallelen erhalten werden, wesentlich unterschieden.

§. 64.

Zusatz. Im Zirkel müssen durch die successive Bewegung einer größern Sehne durch alle Punkte der kleinern alle mögliche widerkehrliche Proportionaltheilungen entstehen. Wann aber die stäte Proportion aller 4 Abschnitte statt habe, kann, ohne eine neue Eigenschaft des Zirkels zu bestimmen, hier nicht angegeben werden.

Lehrsatz.

§. 65.

Zwo gerade Linien können nur in zween von der Mitte gleich entfernten Punkten also durchschnitten werden, daß alle 4 Stücke stät proportionirt sind. Fig. 6.

Beweis. Wenn CE : DE = BE : EH oder kürzer a : b = c : d in einer stäten Proportion; und es wäre möglich, daß auch eine andere Proportionaltheilung von dieser Be-

schaffenheit sey, so müßte es geschehen, wenn 2 vordere Glieder in eben der Ordnung wachsen, wie die beide hintere abnehmen, oder jene abnehmen, wenn diese wachsen; welches bei allen übrigen Proportionen, außer dem gesetzten Falle, statt hat; das ist, wenn man das wechselseitige Wachsthum und Abnahme x, y nennet; so ist bei dem vorigen Werthe der Buchstaben in allen nicht stät proportionirten Fällen $a - x : b - y = c + x : d + y$ eine wahre Proportion.

Im Gegensatze dieses Lehrsatzes müßte nun auch seyn; $a - x : b - y = b - y : c + x$. Es ist aber aus der ersten Proportion der Voraussetzung gemäß $a : b = b : c$ oder $a : ae = ae : ae^2$; und aus der 2ten müßte wegen gleichem Werthe der Buchstaben a, b, c seyn $a - x : ae - y = ae + y : ae^2 + x$; §. 56. woraus das Produkt der äußern und mittlern Glieder gleich, das ist;

$a^2 e^2 - ae^2 x + ax - x^2 = a^2 e^2 - aey + aey - y^2$, oder schicklicher ausgedrückt: $ax - ae^2 x - x^2 = - y^2$ seyn müßte, oder auch $(a - ae^2 - x) x = - y^2$; demnach ferner diese Proportion statt haben müßte: $a -$

$ae^2 - x : \sqrt{-y^2} = \sqrt{-y^2} : x$. Aber $\sqrt{-y^2}$ ist eine unmögliche Größe, das ist: Es müßte das Verhältniß einer möglichen Größe $a - ae^2 - x$ zu einer unmöglichen $\sqrt{-y^2} = \sqrt{-y^2}$ zu einer möglichen x seyn; welches sich widerspricht.

Es können also zwo gerade Linien nur in 2 vom Ende gleich entfernten Punkten E, I also geschnitten werden, daß die 4 Stücke in einer stäten Proportion stehen, welches obiger Lehrsatz ist.

§. 66.

Zusatz. Auf gleiche Art wird dieses von den zirkulären widerkehrlich proportionirten Abschnitten erwiesen.

Fünfter Abschnitt

von mehrern stäten mittlern Proportionallinien.

Lehrsatz.

§. 67.

Die Senkrechte gm auf cd Fig. 5. schneidet om, als die 5te stäte Proportionallinie zu den vorigen oh : of : oc : og ab.

Be-

Beweis. Das Dreyeck gmo ist den vorigen ähnlich.

§. 68.

Zusatz. Also können zwischen zwoen gegebenen geraden Linien 3 ståte mittlere Proportionallinien gefunden werden, wenn man die erste oh mit der 5ten om nach einerley Gegend, von o aus, ordnet.

§. 69.

Zusatz. Gleichmäßig ist on die 6te ståte Proportionallinie zu den vorigen: demnach können zwischen zwoen gegebenen 4 mittlere ståte Proportionallinien gefunden werden, wenn man die größte gegebene als die erste auf die Wendungslinie, die kleinere aber auf den Abwärts gekehrten Schenkel of der Querachse fg, Fig. 5. ordnet.

Lehrsatz.

§. 70.

Wenn fg. Fig. 5. auf ch senkrecht steht, und der Winkel, den die aus dem Abschnittspunkte g nach dem Durchschnitte m der nm

(die

(die mit cd, fh parallel geführet wird) gezogene gm mit mn machet, spitzig ist; so ist der Abschnitt co größer, beim stumpfen Winkel aber kleiner, als die dritte stäte Proportionallinie in der Reihe der mit oh anfangend- und mit on sich endigenden 6 stäten Proportionallinien.

Beweis. Man setzet, wie allemal §. 47. voraus, daß der Endespunkt h der ersten und größten oh beständig an der Bestimmungslinie fh, Fig. 5. oder bc Fig. 4. anliege, und durch gehörige Verschiebung der qw die Zusammenkunft des Punkts b mit qw in allen Fällen erhalten werden könne und müsse. Fig. 4.

Ferner werden die fortgesetzten geraden Linien gp mit ad stäts parallel angenommen.

Nun stelle man sich vor, die or (Fig. 4.) als die vierte in der Reihe uo: ot; oa: or falle mit ihrem Endespunkte r gehörig in ad, so daß op, og wegen fortgehender Aehnlichkeit der Dreyecke zwo fernere stäte Proportionallinien abgeben; es werde aber dann die qw um die Weite oy herab beweget; so wird der Punkt p um gleichweit herabwärts bis nach p rücken, und bei erfolgter Bewegung der

Wen-

Wendungslinie a n um a; als die längere, einen größern Kreisbogen beschrieben, als die kürzere a r, und daher erstere bei Annährung zum gemeinschaftlich verlängerten Halbmesser a d, sich weiter von der Senkrechten a m entfernen, als die leztere, und bei dieser respectiven Verlängerung der a p, der Winkel a p r aus diesem Grunde kleiner, als vorhin, werden.

Ferner wird bei wirklich erfolgter Aufwärtsbewegung der a n der Winkel bei g nothwendig vergrößert, und jener bei p dergestalt kleiner, daß zugleich wegen der unveränderlichen Länge der g o die Entfernung des Punktes p von o (nun p von y) zunehmen muß, wodurch der Winkel a p r von neuem abnehmen muß. Daher dann bei Herabbewegung der Querachse q w, und daraus erfolgter Verlängerung der a o dieser Winkel beständig spiziger wird.

Das Widerspiel erfolget für den stumpfen Winkel aus entgegen gesezten Gründen, wenn die q w aus o gegen a beweget wird.

§. 71.

§. 71.

Zusatz. Also zeiget der spitzige Winkel n m g Fig. 5. an, daß c o zu lang, der stumpfe n m g aber, daß c o zu kurz ist, in der Reihe 6 stäter Proportionallinien, deren äußerste h o - - o n sind.

§. 72.

Zusatz. Folglich ist der rechte Winkel n m g Fig. 5. ein entscheidendes Merkmal der fortdaurenden stäten Proportion.

§. 73.

Zusatz. Wenn o q Fig. 5. als die 7te stäte Proportionallinie angesehen wird, so zeigen die fortgesetzten Parallelen q n, n m, m g mit c d, c f bei ihrer rechtwinklichten Zusammenkunft in m die stätige Folge derselben an.

§. 74.

Zusatz. Man kann also zwischen 2 gegebenen 3, 4 und nach mehrere mittlere Proportionallinien setzen.

Aufgabe.

§. 75.

Zwischen zwoen gegebenen geraden Linien A, B, Fig. 5. drey mittlere stäte Proportionallinien setzen.

Auflösung. Trag die längere oh = A von dem Unterscheidungspunkte o an auf, ch; Und nach eben dieser Richtung om = B, Bewege die ch so lange um ihre Achse, bis der Abschnittspunkt g und m in einerlei Senkrechte fallen; und zugleicher Zeit bewege die oh mit der Querachse gf, auf- oder abwärts, bis dieselbe in den rechten Winkel f fällt.

Beweis. Die Dreyecke sind alle ähnlich.

Aufgabe.

§. 76.

Man soll zwischen zwoen gegebenen geraden Linien 4 mittlere stäte Proportionallinien setzen.

Auflösung. Setzet die größere = oh aus dem Scheidepunkte o auf ch. Fig. 5.

Setzet die kleinere = on an den untern Schenkel der Querachse gf eben von o aus auf of.

Drehet

Drehet c h um c, und verschiebet die f g, mit o h verbunden, so weit, bis g f in den Winkel f fällt, und n m g (§. 69.) einen rechten Winkel giebt; so ist es geschehen.

Der **Beweis** ist wie der vorige.

§. 77.

Zusatz. Auf gleiche Weise kann man fortfahren, noch mehrere mittlere stäte Proportionallinien zu suchen.

§. 78.

Zusatz. Unternähme man es, zwischen die bereits gefundenen unzählige neue mittlere stäte Proportionallinien zu setzen, so würden ihre Endespunkte um den gemeinschaftlichen Scheidepunkt o, Fig. 5. eine archymedische Spiral- oder Schneckenlinie h f c g m n q ꝛc. bilden.

Sechster Abschnitt.

Anwendung zwoer mittlerer Proportionallinien §. 46. 47. auf die Körperlehre.

Aufgabe.

§. 79.

Einen Körper so groß, als zween ähnliche G, H, Fig. 7. 8. ohne Rechnung zu machen.

Auflösung. Ziehet AA, BB, als Durchmesser oder sonst ähnlich liegende Seiten.

Machet C = BB, und D = AA.

Zu C, D suchet die dritte Proportionallinie E.

Ferner setzet C : D = E : F.

Setzet I = C + F.

Zwischen I und C (= BB) suchet, nach §. 47. zwo mittlere Proportionallinien K, L.

Von L beschreibet einen den vorigen G, H ähnlichen Körper.

Dieser ist der verlangte.

Beweis. Es ist aus den Gründen der Körperlehre $H : G = BB^3 : AA^3$, das ist, H : G im 3fachen Verhältnisse der Durchmesser BB : AA.

In der Zeichnung aber ist $C : D = D : E = E : F$; das ist, $C : D = (BB : AA =) E : F$ stehen in einer ståten Proportion; folglich $BB : F = BB^3 : AA^3 (= H : G)$; und daher $C + F : C = H + G : H$, und verkehrt:
$C : C + F = H : H + G$.

Man nenne den gesuchten Durchmesser des Kórpers $= X$, so muß seyn $H : H + G = C^3 : X^3$.

Es ist aber, vermóg der Auflósung, $C : L = L : K = K : I$ oder

$C : L = K : I (= C + F)$ in ståter Proportion: das ist

$C : C + F = C^3 : L^3$.

Aber L ist die einzige mógliche in der Ordnung einer viergliederig-ståten Proportion nach §. 65. also $L = X$.

§. 80.

Zusatz. Will man einen Kórper haben, der dem Unterschiede zwoer åhnlichen gleich sey; so wird aus gleichem Grunde

$C : C - F = H : H - G$, und

$C^3 : X^3$, oder zu dem Würfel der 2ten aus der Reihe $C : X = Y : C - F$.

§. 81.

Zusatz. Ist das Verhältniß der Körper in Zahlen gegeben, z. B. 9 : 16, so suchet man zwo Linien a, b von der Beschaffenheit, daß 9 : 16 = a : b.

Zwischen a : b suchet man 2 ståte mittlere Proportionallinien x, y also, daß a : x = y : b in ståter Proportion.

Von x beschreibet man einen åhnlichen Körper, wie von a; oder wenn b der gegebene ist, von y einen åhnlichen wie von b.

§. 82.

Zusatz. Folglich kann man mittelst des obigen Lehrsatzes §. 46. u. 47. jeden Körper mit beibehaltener Aehnlichkeit nach jedem Verhåltnisse vergrößern, oder verkleinern.

Lehrsatz.

§. 83.

Das Tetraådron Fig. 9. B ist dem 12ten Theile des durch die Quadratwurzel aus 2 multiplicirten Würfels seiner Seiten gleich.

Beweis. Es sey erstliich Fig. 9. A das gleichseitige Dreyeck a b c gegeben, dessen Stücke Kürzehalber mit einzeln Buchstaben ausgedrückt, das ist:

$$\begin{cases} bc = \alpha \\ be = \beta = \frac{1}{2}\alpha \\ ce = \gamma \\ de = \delta \end{cases}$$

Ferner sey B das Tetraädron, dessen Dreyeck a b c mit dem vorigen A einerlei, und das Tetraädron a f c b darauf beschrieben: dessen fernere Stücke die von der Spitze auf die Grundfläche senkrecht gezogenen

$$\begin{cases} df = \varepsilon \\ ef = \zeta \end{cases}$$

So ist in A. $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = \frac{3}{4}\alpha^2$, und

$$\gamma = \sqrt{\tfrac{3}{4}\alpha^2} = \alpha\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{3}.$$

Ferner sind die Dreyecke c e b ∽ b e d, folglich

$\gamma : \beta = \beta : \delta$; das ist,

$$\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{3} : \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha : \frac{\frac{1}{4}\alpha^2}{\frac{1}{2}\alpha\sqrt{3}} (= \delta) = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Ferner ist in B, wegen dem rechten Winkel bei d. $\zeta^2 = \varepsilon^2 + \delta^2 = \gamma^2 = \frac{3}{4}\alpha^2$, und

$$\varepsilon^2 = \zeta^2 - \delta^2 = \tfrac{3}{4}\alpha^2 - \delta^2;\ \text{aber}$$

$$\delta^2 = \frac{\frac{1}{4}\alpha^2}{3} = \tfrac{1}{12}\alpha^2;$$

daher $\varepsilon^2 = \frac{3}{4}\alpha^2 - \frac{1}{12}\alpha^2 = \frac{2}{3}\alpha^2$; und daraus

$$\varepsilon = \sqrt{\tfrac{2}{3}\alpha^2} = \alpha\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Nun aber ist das Dreyeck abc oder A =

$$\frac{\alpha . \gamma}{2} = \frac{\alpha . \frac{1}{2} \alpha \sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4};$$

Und der körperliche Inhalt des Tetraëdri B oder

$$afcb = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4} . \frac{1}{3} \varepsilon = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4} . \frac{\alpha \sqrt{\frac{2}{3}}}{3} =$$

$$\frac{\alpha^3 \sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{3}}}{12}.$$

Aber $\sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3} . 3} = \sqrt{2}$; demnach ist

$$afcb = \frac{\alpha^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Welches der obige Lehrsatz war.

§. 84.

Zusatz. Wenn also der Würfel $= \alpha^3$, und das Tetraëdron $= B$; so ist $12 B = \alpha^3 \sqrt{2}$, und demnach $12 : \sqrt{2} = \alpha^3 : B$.

§. 85

Anmerkung. Auf ähnliche Art lassen sich alle reguläre Körper mit den Würfeln ihrer Seiten, oder Durchmesser vergleichen. Den Inhalt unregelmäßiger Körper muß man aus der Beschaffenheit der Flächen, von denen sie eingeschlossen werden, bestimmen; wo aber gar

keine sichere Gesetze statt finden, sich mit mechanischen Mitteln behelfen, um ihre Größe so genau, als möglich, anzugeben.

Aufgabe.

§. 86.

Einen Würfel in ein Tetraädron zu verwandeln.

Auflösung. Nehmet beliebig zwo gerade Linien a, b von der Beschaffenheit, daß a: b = 12 : $\sqrt{2}$.

Suchet zwischen a, b zwo mittlere Proportionallinien, also, daß a : x : y : b in stäter Proportion.

Suchet zu b, y und, α der Seite des des gegebenen Würfels (α^3) die vierte Proportionallinie ε also, daß b : y = α ; ε.

Von ε beschreibt ein Tetraädron; dieses ist das verlangte.

Beweis. Es sey B, Fig. 9. ein Tetraädron von gleichen Seiten mit dem gegebenen Würfel α^3, Fig. 10.

Da nun b : y = α : ε; so ist auch $b^3 : y^3 = \alpha^3 : \varepsilon^3$.

Es ist aber $b^3 : y^3$ = b : a = B : α^3. §. 83.

Demnach verhalten sich die ähnlichen Körper, die von den Seiten $\alpha : \beta$ beschrieben werden, wie $B : \omega^3$.

Da nun $b : a = B : \alpha^3$, und

$b : a = \alpha^3 : \beta^3$; so ist

$B : \alpha^3 = \alpha^3 : \beta^3$, und

$\sqrt[3]{B} : \alpha = \alpha : \beta$; das ist:

das Tetraädron von $\alpha : B$ = Tetraädron von $\beta : \alpha^3$.

Es ist aber das Tetraädron von $\alpha = B$, folglich das Tetraädron von $\beta = \alpha^3$.

§. 87.

Zusatz. Man kann also durch Hilfe zwoer mittlern Proportionallinien jeden Körper A in einen andern B verwandeln, der einem dritten Körper C ähnlich ist. Voraus gesetzt, daß man nach §. 85. jeden Körper auf den Würfel reduciren, oder, welches einerlei ist, seine Größe bestimmen kann.

§. 88.

Erinnerung. Ich begnüge mich, durch diesen VIten Abschnitt die Anwendbarkeit der im III. Abschnitte entdeckten neuen Wahrheiten

ten auf die Geomerie mit wenigen gezeiget zu haben: Liebhaber können diesen Stoff nach belieben weiter bearbeiten, und die Elementarstereometrie mit mehrern Zusätzen bereichern. Ich sage es mit Bedachte: die **Elementarstereometrie**, und halte um so fester darüber, daß dergleichen Aufgaben in die Elementargeometrie gehören, weil es nun aus §. 46. gewiß offenbar ist, daß die Elementargeometrie einfachere und **homogenere** Mittel zur Auflösung derlei Aufgaben darbietet, als die mit den Kunstgriffen der Analytik verpaarte höhere Geometrie, mittelst der so vielfältig verbundenen ungleichartigen krummen Linien. Und dieses um so mehr, als kein Geometer ist, der die Verwandlung, und Vergrößerung der Flächen **nach jedem gegebenen Verhältnisse**, welche sich auf die um einen Grad niedrere Erfindung **einer** mitteln Proportionallinie gründet, nicht als einen wesentlichen Theil der ebenen Geometrie betrachtet.

Anhang
einiger Aufgaben
aus der theoretischen sowohl, als aus verschiedenen Theilen der praktischen Geometrie,

welche mittelst des im Vorberichte erwähnten Instruments entweder überhaupt in ganzen Linien, oder dergestalt in Zahlen aufgelöset werden können, daß man die 100sten, und jede andere größern oder kleinern Theile eines Zolles, oder einer andern Einheit nach jedem verjüngten Maßstabe angeben kann.

Aufgaben in bloßen Linienlängen.

§. 1.

1. Eine jede gegebene gerade Linie nach jedem gegebenen Verhältnisse augenblicklich zu theilen.
2. Zu zwoen gegebenen die 3te Proportionallinie zu finden.
3. Zu 3 gegebenen die 4te Proportionallinie zu finden.
4. Zwischen 2 gegebenen eine mittlere Proportionallinie zu setzen.
5. Eine gegebene gerade Linie nach dem äußerst und mittelsten Verhältnisse zu theilen.

6. Zwi-

6. Zwischen 2 gegebenen 2 mittlere; imgleichen
7. — — — 3, 4 und mehr mittlere stäte Proportionallinien zu finden.

Von den Winkeln.

§. 2.

8. Einen Winkel einem gegebenen gleich zu machen,
   a) Durch Stellung des Instruments.
   b) Durch Angebung der Bogengrößen.
9. Jeden Winkel zu halbiren: und wenn er in Graden bekannt ist, nach jedem Verhältnisse zu theilen.

Dreyecksmessungen.

§. 3.

10. Aus zwoen gegebenen Seiten, und dem eingeschlossenen Winkel, die 3te Seite, und übrigen Winkel zu finden.
11. Aus zwoen gegebenen Seiten, und dem Winkel, welcher der größern, oder kleinern gegenüber steht, das übrige zu finden.
12. Aus einer gegebenen Seite und zwoen Winkeln, die entweder daran liegen, oder deren einer dieser Seite gegenübersteht, die übrigen Seiten ꝛc. zu finden.

13. Aus allen 3 Seiten die Winkel zu finden.

* Anwendung obiger Aufgaben auf die Feldmesserey.

§. 4.

14. Die Entfernung zweyer Oerter zu messen, zu denen man aus einem 3ten Stande nur kommen kann.

15. Die Entfernung zweyer Oerter zu messen, zu deren einem man nur kommen kann.

16. Die Entfernung zweyer Oerter zu messen, zu deren keinem man kommen kann.

17. Eine Höhe zu messen, zu deren Fuß man kommen kann.

18. Eine Höhe zu messen, zu deren Fuß man zwar nicht kommen, nach der man aber von 2 bekannten ungleichen Entfernungen, leztere mögen eine gleiche, oder eine bekannte ungleiche Höhe haben, sehen kann.

Von Flächenmessungen ꝛc.

§. 5.

19. Ein Dreyeck so groß, als mehrere ähnliche zu machen.

20.

* Aus einem spitzigen Winkel, und einer Seite des rechtwinklichten Dreyecks das übrige zu finden.

20. Jeden Flächenraum so groß, als mehrere ähnliche zu machen.

21. Ein Dreyeck zu machen, welches einem gegebenen gleich, und einem andern ähnlich sey.

22. Eben dieses gilt von andern Flächen, die sich auf Dreyecke reduciren lassen.

23. Einen jeden geradelinichten Raum nach jeden Verhälnisse zu vergrößern.

Von Körpermessungen ꝛc.

24. Daß Verhältniß zweener ähnlicher Körper, deren gleichnamige Maße gegeben sind, zu finden.

25. Einen Körper mehrern gegebenen gleich und ähnlich zu machen.

26. Einen Körper nach jedem Verhältnisse zu vergrößern, oder zu verkleinern.

27. Einen Körper, dessen Inhalt gegeben ist, einem andern ähnlich zu machen, z. B. den Würfel in eine Kugel, Pyramide, Walze u. d. g. zu verwandeln.

Anwendung obiger Aufgaben auf vermischte Gegenstände.

28. Aus der Höhe einer Mauer, und dem Neigungswinkel, oder der dazwischen liegenden

Breite eines Grabens die Länge einer Leiter, die gedachte Höhe erreiche, zu finden.

29. Aus der Breite eines Hauses, und der Höhe des Gipfels, die Größe des Daches zu finden

30. Aus der Neignng eines Berges den Betrug bei Schichtung des Holzes, oder der Steine, zu finden.

31. Den Grundriß eines Gebäudes, oder Grundes, nach jedem Verhältnisse zu vergrößern, oder zu verkleinern.

32. Aus der Länge eines hervorragenden Balkens, und seiner Dicke, die Last, die er tragen kann, zu beurtheilen rc.

33. Einen Visierstab zu verfertigen.

34. Aus der Deklination, und Sonnenhöhe die Zeit zu finden.

35. Aus dem Stande des Mondes, und seiner Entfernung von der Sonne, die Zeit zu finden.

36. Aus der periodischen Zeit des Planetenlaufs, und der Zeit, welche seit seiner Conjunktion verstrichen, seinen Stand zu finden.

37. Aus der Entfernung, und dem Winkel, unter welchem ein Körper gesehen wird, seine Größe zu finden.

Beschluß.

§. 8.

Man läßt es bei diesen wenigen Aufgaben, die man wegen Mangel der Zeit gleichsam aus dem Stegreife niederschrieb, bewenden. Man hätte ihre Anzahl, zumalen wenn man jene vom Proportionalzirkel mitnehmen, oder andere in praktischen Lehrbüchern, und bei mancherlei Künstlern hätte aufsuchen, und sammeln wollen, ums vielfache vergrößern können: wenn die gegenwärtigen nicht hinreichen könnten, den manchfaltigen Nutzen des Instruments vorläufig begreiflich zu machen.

Man wird nicht zweifeln können, wenn die gute Auswahl, und gute Einschläge der Kenner, Künstler und Liebhaber ihren erwünschten Einfluß äußern werden, welch ein weitläuftiger Stoff für eine zukünftige Ausarbeitung daraus erwachsen wird, so daß man sich geflissentlich wird einschränken müssen. Dieser Umstand hinderte auch, daß man für gegenwärtig noch keinen sichern Plan von der künftigen Einrichtung festsetzen konnte, weil dieses eine Sache ist, die mehr von dem Gutachten der Kenner und Liebhaber, als von eigener Willkühr abhangen wird. Der Stoff scheinet sich

frei-

freilich hauptsächlich auf die Seite derjenigen Liebhaber zu neigen, welche ohne viele Theorie zur praktischen Ausübung der Meßkunst schreiten wollen: indessen wird es Gelegenheit genug geben, es auf mancherlei Art zu zeigen, wie wenig eine bloß praktische Fertigkeit in den meisten Fällen zureiche, und den aufklärend- oder überzeugenden Theil der Geometrie beliebt zu machen: ein Werk, welches der guten Sache der ächten Geometrie in aller Absicht nützen, und in Rücksicht auf ein so brauchbares Instrument nothwendig und gemeinnützig wird.

Zweifler, denen es befremdlich vorkommt, wie man sich könne einfallen lassen, mit einem einzigen Werkzeuge so mancherlei Absichten zu erreichen, und nebst den geometrischen auch mechanische, architektonische, ja sogar optische, astronomische, gnomonische u. m. a. Aufgaben auflösen zu wollen, werden doch dessen Möglichkeit vor der Zeit so wenig bestreiten, als sie nun in Zweifel ziehen können, daß durch den nämlichen einfachen Weg, durch welchen man einzele Proportionallinien findet, das sonst mit so vielen Weitläuftigkeiten, ja Schwierigkeiten verwickelte **Delische Räthsel** §. 47. mit geringer Mühe aufgelöset wird.

Nach-

I. Nachricht
für Liebhaber der Geometrie, von einer allgemein anwendbaren geometrischen Maschine.

Nichts ist in der ausübenden Meßkunst erwünschlicher und angenehmer, als dienliche Werkzeuge und Kunstgriffe, wodurch man das, was eine gründliche Theorie einsehen lehret, so genau und schnell, als es nur Menschenhänden und Sinnen möglich ist, ins Werk richten, und abstrakte Wahrheiten, zu denen der Verstand durch den aufklärenden Theil der Geometrie gelanget, realisiren kann.

Dergleichen Werkzeuge sind nun freilich nach der Verschiedenheit der Gegenstände, für die sie bestimmt sind, in der Menge vorhanden, und zu einer solchen Vollkommenheit gebracht, als man es nur wünschen kann.

Bei der Beschwerlichkeit, welche die Vielfältigkeit derselben verursachet, bleibt aber noch immer der Wunsch übrig, mehrerlei Kunstgriffe mit einem einzigen verbinden, oder einen Werkzeug, durch einen noch brauchbareren entbehrlich machen zu können. Dieser Wunsch

ist durch ein ganz neu erfundenes geometrisches Instrument aufs vollkommenste erfüllet worden.

Ein Liebhaber der Geometrie und Mechanik hat erst mit Ende des 1780sten Jahres eine Maschine zu Stande gebracht, mittelst deren man nicht nur die Theilung der Linien nach jedem Verhältnisse aufs genaueste und behändeste bewerkstelligen, alle Arten von Proportionallinien, jene von 2, ja noch mehr mittlern ꝛc. nicht ausgeschlossen, mit einer ungemeinen Bequemlichkeit erfinden; sondern auch die Ausmessungen im Großen, ohne andere theure Zubereitungen, verrichten, wie nicht minder, verschiedene ganz neue nützliche Aufgaben auflösen kann.

Die weitere Auskunft ist in einem eigenen bei dieser Gelegenheit heraus gekommenen Werklein unter dem Titel: **Neueröffnetes Geheimniß der Parallellinien, enthaltend einige wichtige Zusätze zur Proportion- und Körperlehre,** welches in dem Verlage der von Ghelenschen Buchhandlung zu haben ist.

In eben dieser Buchhandlung werden Bestellungen wegen gedachter Maschine angenommen werden. Die Maschine wird nach der Absicht der Liebhaber von verschiedener Art veranstaltet werden, um zugleich den Preis nach den Vermögensumständen oder ökonomischen Absichten eines jeden einrichten zu können. Dieser Preis wird mit den Gräden der Vollkommenheit und mancherlei Zusätzen von 3 Dukaten an, bis auf 6 steigen, und dießfalls jedem die Wahl frey gestellet werden.

Da aber die Maschine selbst von einer Bogengröße und 3 Zoll dicke, theils für Auswärtige beschwerlich und theurer fortzubringen, theils auch ein paar dazu bestellte Künstler nicht geschwind genug möchten folgen können; so wird man entfernte Liebhaber mit Modellen von ½ Bogengröße bedienen, welche kaum 4 Loth schwer, und sich sehr bequem unter Schriften fortbringen lassen. Jedes dieser Muster wird alle Grade der Vollkommenheit zugleich vorstellen, welche mittelst einer beigehenden Erläuterung beschrieben, und deutlich bestimmt sind.

Auch können gedachte Modelle, wo es nicht auf eine sonderliche Schärfe ankommt,

anstatt der Maschine selbst gebrauchet werden. Der Preis eines solchen Models sammt der Beschreibung und Auflösung der Aufgaben kostet 3 fl.

Die vornehmsten Aufgaben, die mittelst dieses Werkzeuges aufgelöset werden, sind in dem oben angezogenen Werklein enthalten; deren Auflösungen, so lange nicht die vollständige Ausführung im Drucke erscheint, indessen handschriftlich abgereichet werden. Jeder Liebhaber kann sich von gedachten Aufgaben jene auswählen, woran ihm am meisten gelegen ist, und dadurch den Preis der Abschrift so wohl, als jenen der Maschine erleichtern.

Man wird zwar trachten, beständig einige Maschinen zur Auswahl vorräthig zu haben. Wo es aber auf Bestellungen ankommt, wird man sich durch genaue Kundschaft, Subscription, oder durch die halbe Vorausbezahlung versichern, und für desto schnellere Beförderung sorgen.

Wien den 28. Hornung 1781.

II. Nach-

II. Nachricht

für Bauleute, Bildhauer, Schreiner, Machinisten und andere Künstler, welche mit scharfen Lintheilungen, und andern genauen Ausmessungen zu thun haben;

von einem neu erfundenen sehr brauchbaren Proportion- und Theilungsinstrumente.

Alles dasjenige, was praktische Feldmesser interessiret, kann für eine oder für die andere, auch wohl für alle Gattungen mechanischer

Künstler anwendbar und erwünschlich seyn.

Man verweiset sie also auf die I. Nachricht, für Liebhaber der Geometrie, welche beigeht, und in der von Ghelenschen Buchhandlung unentgeltlich, nebst dem zu dieser Absicht gehörigen Werklein: Neueröffnetes Geheimniß der Parallellinien, enthaltend verschiedene wichtige Zusätze zur theoretisch- und praktischen Geometrie, aber um einen billigen Preiß zu haben ist.

III. Nach-

III. Nachricht

von einem neuen,

für alle Klassen geometrischer Liebhaber sehr brauchbaren Werke,

genannt:

Allgemeiner Nutzen und Vorzüge der Parallelen,

und rechten Winkel,

zur Erleichterung und Abkürzung des Unterrichts.

Man hat sich durch die unter dem Titel: Neueröffnetes Geheimniß der Parallellinien, neu herausgegebenen Zusätze zur Proportion- und Körperlehre, und die zu dieser Absicht neu erfundenen mechanischen Kunstgriffe in dem Stand gesetzet, die vornehmsten (d. i. am häufigsten vorkommenden) Aufgaben der Geometrie, unter ein gewisses allgemeines Gesetz zu bringen, und mit Hilfe eines einzig einfachen Werkzeuges mit einer ungewöhnlichen Behändigkeit und Schärfe aufzulösen.

Einige Aufgaben sind in obgedachtem Werkchen, als ein Anhang, zur Probe beigesetzet worden: deren Anzahl aber bereits über 100 angewachsen ist, die man nebst ihrer Auflösung Liebhabern, die sich beim Verleger darum melden, schriftlich mittheilen, auch sofern man eines hinlänglichen Absatzes versichert seyn sollte, mit der Zeit durch den Druck gemeinnütziger machen wird.

In

In sofern nun wäre diese Anleitung blos praktisch.

Um aber durch dergleichen Kunstgriffe nicht etwa den Leichtsinn zu stärken, sondern nach der Absicht gründlicher Geometer, die Liebe zu mathematischen Erkenntnissen rege zu machen, wird man es bei der blinden Praktik nicht bewenden lassen.

Das Eis ist durch obgedachte Zusätze bereits gebrochen, um ein ausführliches geometrisches Werk zu liefern, in welchem man durch bloße Verbindung 5 gerader Linien, die auf einem einfachen Instrumente angebracht sind, die gemeinnützigsten Wahrheiten der Geometrie, die nicht unmittelbar den Zirkel zum Gegenstande haben, auf eine ganz neue, gründliche, doch kurze Art, vortragen wird.

Ohne Zweifel wird dieser neue Leitfaden, außer mehr erwähnten Zusätzen, noch manche andere nützliche Erfindungen mit sich bringen, und vorzüglich denjenigen willkommen seyn, die ohne die gewöhnlichen Umwege zu Erkenntniß und Anwendung der vornehmsten geometrischen Wahrheiten gelangen wollen.

Die einzige Versicherung, sich dem mathematischen Publikum hiedurch gefällig zu machen, wird den Verfasser veranlassen, sothanes Werk nach 18 Monaten im Drucke herauszugeben, wenn sich bis Ende dieses Jahres eine hinlängliche Anzahl der Liebhaber subscribiren, oder vorläufig melden wird.

Auf einzele Exemplarien werden 20, duzendweise aber 30 p. C. zum besten gegeben.

Wien den 28. Hornung 1781.

Tab: I.

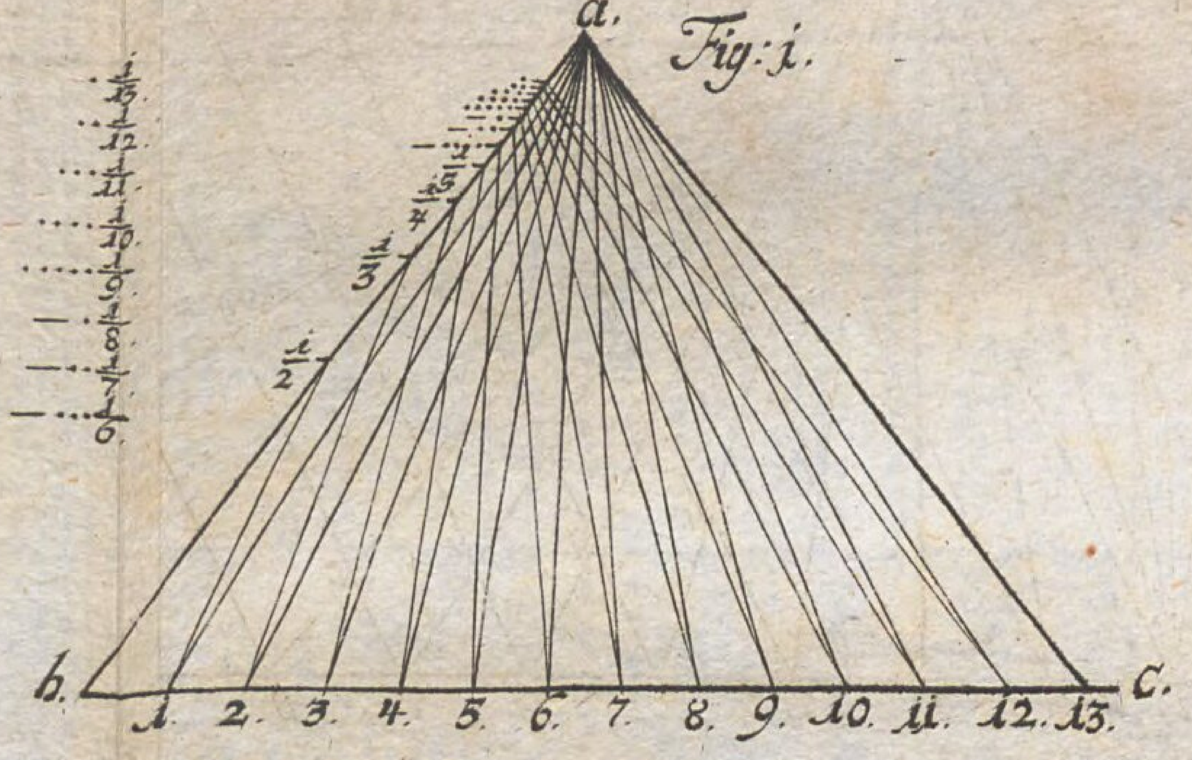

Fig: 1.

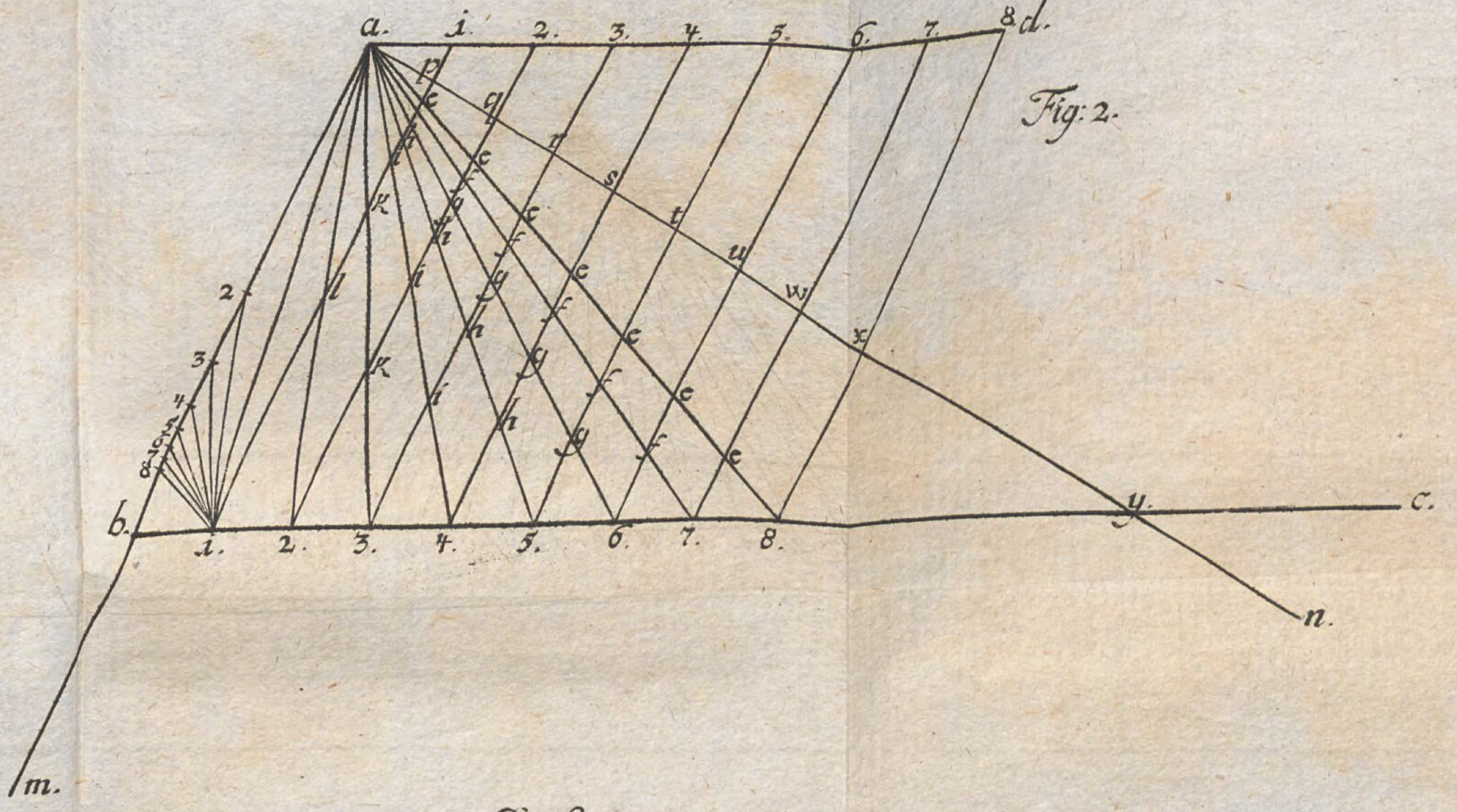

Fig: 2.

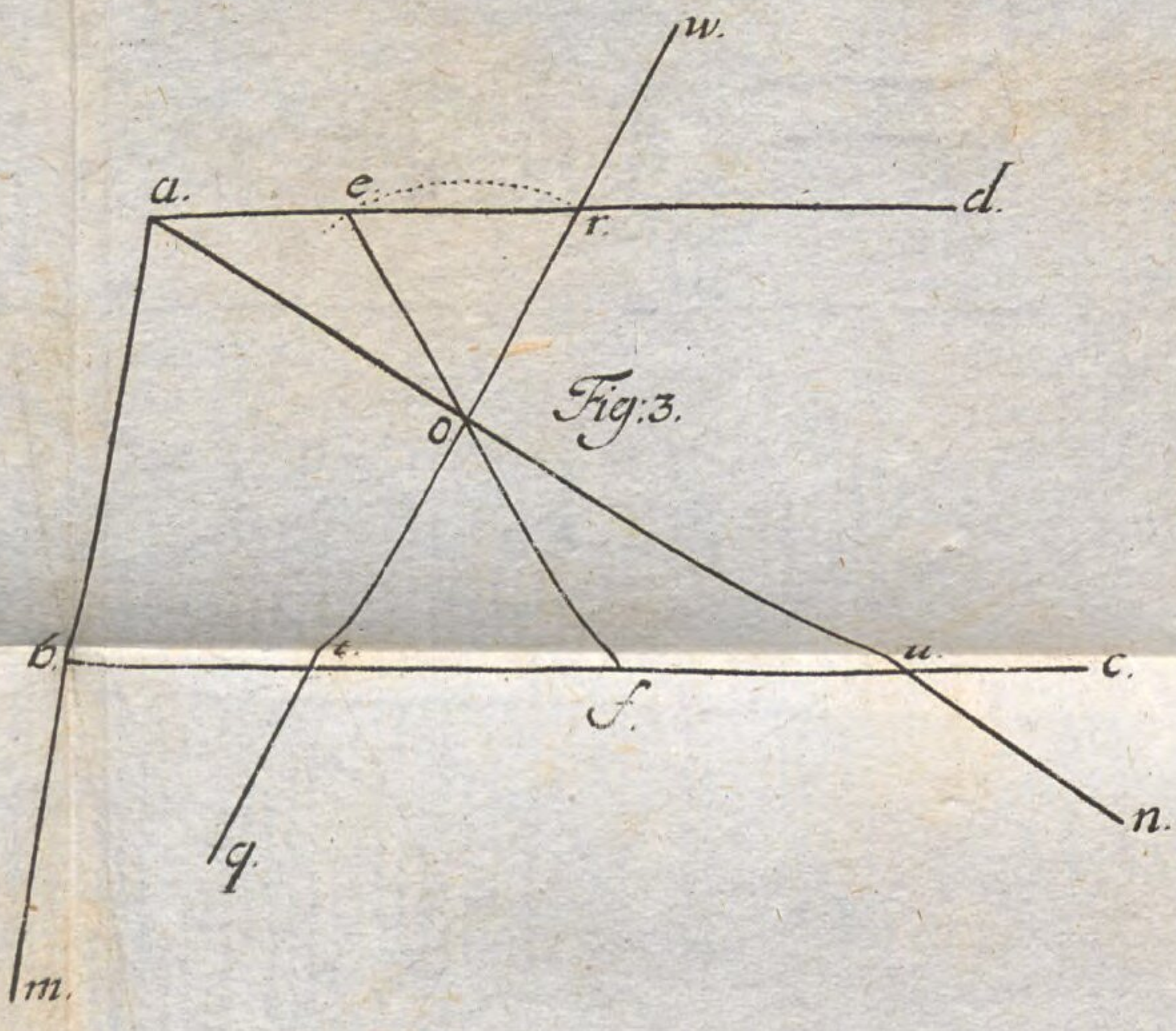

Fig: 3.

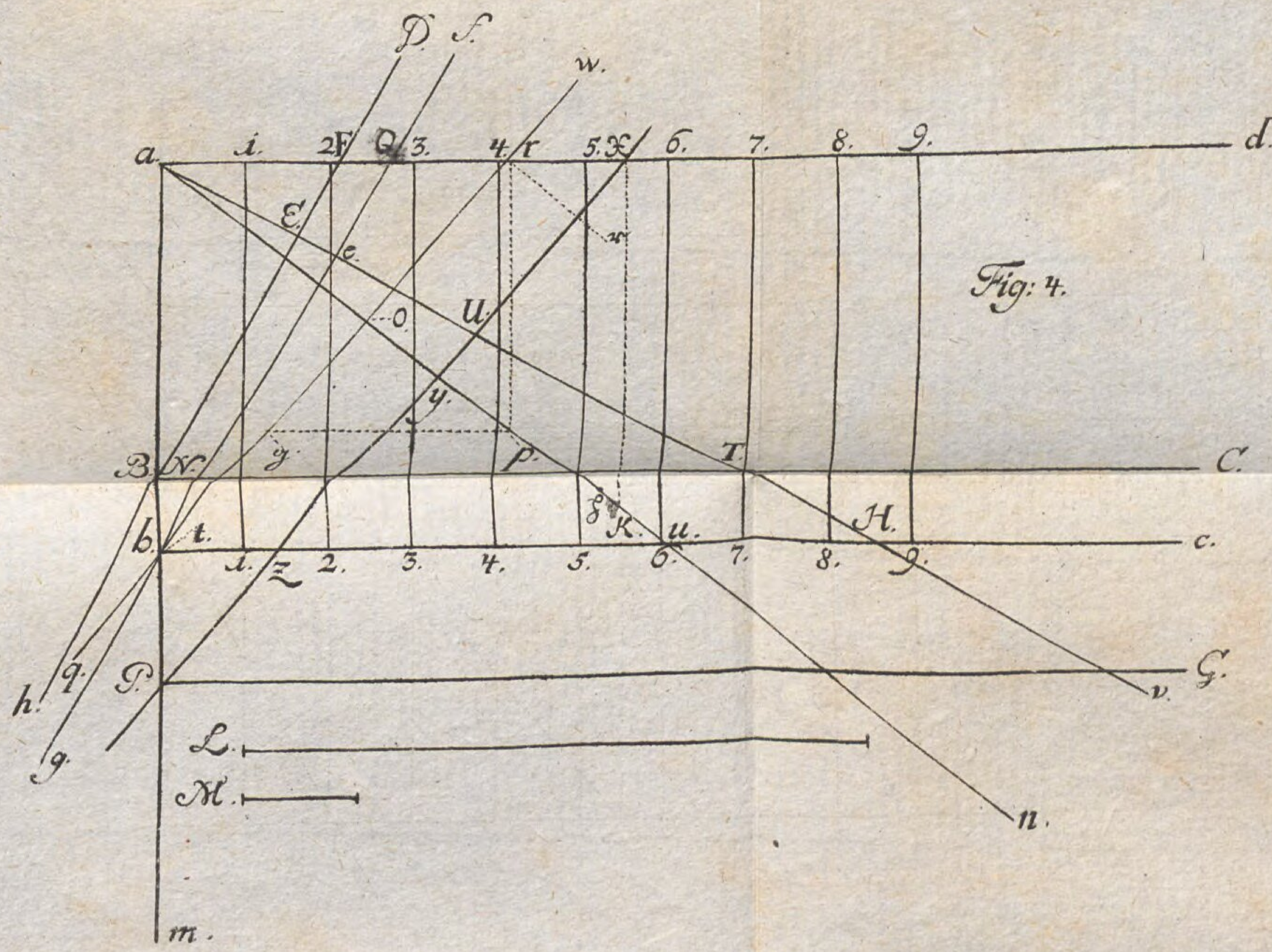

Fig: 4.

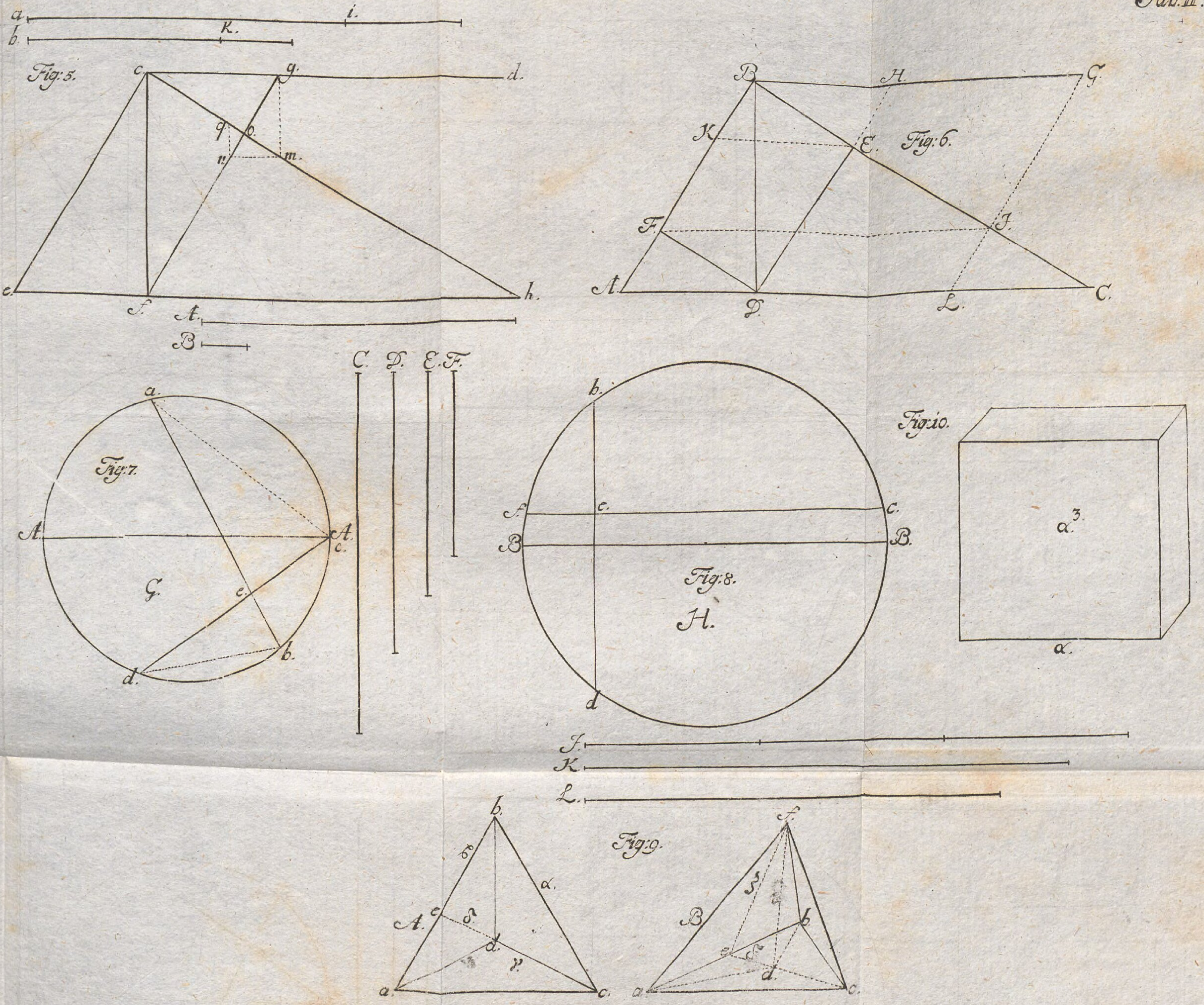
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.
Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
G.
H.
a^3

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Felkel, Anton,

Neueröffnetes Geheimniß der Parallellinien

Wien 1781

Math.p. 145
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081774-7
VD18 14008998-002